

Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби

УДК: 519.635

На правах рукописей

**СЕИТОВА АЛИЯ АМАНГАЛИЕВНА**

**Спектральный анализ нерегулярных по Биркгофу  
краевых задач для дифференциальных уравнений  
высших порядков**

6D060100

Диссертация на соискание степени  
доктора философии (PhD), доктора по профилю

Научные консультанты:  
Кангужин Балтабек Есматович  
Доктор физико-математических наук, профессор

Тихонов Сергей Юрьевич  
Доктор физико-математических наук, профессор

Республика Казахстан  
Алматы, 2023

Посвящается моим детям  
Қожабекову Жәнібеку  
Қожабековой Айсулу

## СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОЛНОТЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ	8
1.1 О полноте систем экспонент	8
1.2 Полнота экспоненциальной системы на отрезке вещественной оси	10
2 ПОЛНОТА СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ	16
2.1. О полноте системы корневых функций дифференциальных операторов на отрезке	16
2.2. О полноте вырожденных двухточечных краевых задач Штурма-Лиувилля на отрезке	20
2.3 Интегральное представление характеристического определителя двухточечной граничной задачи для уравнения Штурма-Лиувилля	22
2.4 Формулировка и доказательство полноты системы собственных и присоединенных функций вырожденной краевой задачи Штурма – Лиувилля	29
3 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО ОПЕРАТОРА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ УСЛОВИЯМИ	38
3.1 Операторы преобразования, связанные с серединой отрезка	38
3.2 Формулы среднего значения для решений обыкновенных дифференциальных уравнений	43
3.3 Об одном операторе, связанном с нерегулярными краевыми условиями	45
3.4 Интегральное представление характеристического определителя оператора $L$	47
3.5 Асимптотика собственных значений оператора $L$	52
3.6 Примеры, когда собственные значения оператора $L$ вычисляются точно	55
3.7 Целые функции, порождающие корневые функции оператора $L$	57
3.8 О полноте системы корневых функций оператора $L$	59
4 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПО БИРКГОФУ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ	68
4.1 Асимптотика собственных значений оператора двукратного дифференцирования с регулярными по Биркгофу граничными условиями на графе-звезде	68
4.2 О вырожденных краевых задачах Штурма-Лиувилля на геометрических графах	81
5 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПО БИРКГОФУ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ	89
5.1 Полнота систем корневых функций дифференциальных операторов четвертого порядка с общими граничными условиями	89
5.2 Некоторые вспомогательные утверждения	91
5.3 Вычисление характеристического определителя для дифференциальных уравнений с симметричными коэффициентами	93
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	113
ПРИЛОЖЕНИЕ	115
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	126

## НОРМАТИВНЫЕ ССЫЛКИ

В настоящей диссертации использованы ссылки на следующие стандарты:

1. Государственная программа развития образования в Республике Казахстан на 2011-2020 годы Указ Президента Республики Казахстан от 7 декабря 2010 года №1118.

2. Президенту Республики Казахстан Н.А. Назарбаеву. Послание Назарбаева народу Казахстана «Стратегия «Казахстан - 2050»: новый политический курс созданного государства» // Суверенный Казахстан. – 2012.– 15 декабря.

3. Закон Республики Казахстан «Об образовании». // Алматы: Юрист, 2007.-42 с.

4. Государственная программа развития образования и науки Республики Казахстан на 2016-2019 годы.

5. Концепция развития образования в Республике Казахстан до 2020 года.

6. Закон Республики Казахстан «О науке» от 24.10.2011. №407-IV. - Астана, 2011. (ред. От 29.09.2014). <http://adilet.zan.kz>.

7. Развитие образования и науки Республики Казахстан на 2016-2019 годы. государственная программа для. Президент Республики Казахстан 01.03.2016 №205 Постановление. - Астана, 2016

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность диссертационного исследования.** В работах с 1940 года, а также в ранних математических работах, изучались условия полноты в  $L^p$  на замкнутом конечном отрезке вещественной оси, условия полноты на каждом отрезке короче данного. В данной диссертационной работе рассмотрены условия полноты экспоненциальной системы функций на вещественной оси.

В работе строится асимптотика собственных значений оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде с регулярными по Биркгофу краевыми условиями и доказана полнота системы корневых функций рассматриваемого оператора в пространстве  $L_2(\mathfrak{Z})$ . Изучение подобных операторов с точки зрения спектрального анализа является актуальной проблемой, которая требует индивидуального исследования. В работе предлагается рассмотреть решение этой проблемы. Графы представляют интерес с математической точки зрения, так как они хорошо моделируют свойства систем, зависящих от геометрии и топологии пространства. Графы состоят из нульмерных и одномерных многообразий, что позволяет изучать, как смешанная размерность влияет на свойства математических объектов, определенных на графах.

**Цель исследования:** настоящей работы является полнота корневых функций дифференциальных операторов первого, второго и четвертого порядков на отрезке с общими граничными условиями, исследование полноты системы корневых функций различных дифференциальных операторов в функциональном пространстве  $L_2(0,1)$ .

**Задачи исследования** в диссертационной работе, следующие:

Разработка методов спектрального анализа адаптированных для нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков.

Исследование свойств полноты нерегулярных по Биркгофу краевых задач высших порядков.

Доказательство существования собственных значений и собственных функций для нерегулярных по Биркгофу краевых задач на граф-звезде.

В целом, основной задачей диссертационного исследования является расширение теоретических знаний о дифференциальных операторах на отрезке и графах и создание методов обоснования полноты системы корневых функций нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков, что может иметь практическое значение в строительной механике.

Таким образом, **объект исследования** - задача на собственные значения в функциональном пространстве  $L_2(0,1)$ . Каким требованиям должны удовлетворять краевые условия дифференциального уравнения четвертого порядка, чтобы система корневых функций задачи являлась полной в пространстве  $L_2(0,1)$ ?

Для достижения поставленной цели в диссертации исследуются следующие задачи:

- определить условия полноты экспоненциальной системы на отрезке вещественной оси;
- расширить класс дифференциальных операторов второго порядка, которые обладают полной системой корневых функций;
- вывести формулу вычисления коэффициенты характеристического определителя в случае вырожденных краевых задач;
- выписать общее представление характеристического определителя для дифференциального оператора четвертого порядка;
- описать всевозможные условия вырожденности и невырожденности граничных условий для операторов четвертого порядка.

**Положения**, которые выносятся на защиту диссертационной работы:

- 1) найдены необходимые и достаточные условия полноты системы корневых функций для дифференциальных операторов с общими интегро-дифференциальными условиями;
- 2) расширен класс дифференциальных операторов второго порядка, имеющих полную в  $L_2(0,1)$  систему корневых функций. Приведены иллюстративные примеры;
- 3) для операторов Штурма – Лиувилля на граф – звезде введены граничные условия типа регулярных условий Биркгофа и доказаны теоремы о полноте корневых функций в некоторых функциональных пространствах таких операторов;
- 4) для дифференциальных операторов четвертого порядка введены аналоги вырожденных и невырожденных краевых условий. В случае операторов второго порядков эти классы обобщают известные граничные условия, являющиеся невырожденными в смысле В.А. Марченко.

**Методы исследования**, использованные в работе, включают спектральный анализ, основанный на аналитических методах теории функций комплексного переменного, а также на абстрактных результатах функционального анализа. Важное место при выполнении диссертации сыграли математические средства, относящиеся к классической теории дифференциальных уравнений.

**Научная новизна** диссертационной работы, с одной стороны, заключается в разработке специальных математических средств адаптированных для доказательства полноты систем функций. С другой стороны, в диссертации используются некоторые глубокие результаты теории целых функций, которые позволяют детально исследовать поведение характеристических определителей исследуемых задач. Важным новым моментом в диссертации являются интегральные представления характеристических определителей и дальнейшая возможность оценки их роста вдоль некоторых лучей комплексной плоскости.

**Обоснованность научных результатов** диссертации вытекает из внутреннего единства выводов и положений, а также логически выверенными

рассуждениями, которые себя зарекомендовали в предыдущих исследованиях по данной тематике. **Достоверность** выводов и положений диссертации основана на хорошо апробированных методах теории линейных операторов в гильбертовых пространствах, а также в удачном использовании глубоких результатов теории целых функций.

**Теоретическая значимость исследования** заключается в разработке специальных методов спектрального анализа нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков, что позволяет расширить теоретические знания об этом классе задач и дать новый взгляд на некоторые аспекты спектральной теории дифференциальных операторов.

**Практическая значимость исследования** заключается в возможности использования результатов исследования при решении прикладных задач в различных областях науки и техники, связанных с решением дифференциальных уравнений высших порядков, таких как математическая физика, строительная механика, инженерия и другие.

**Оценка полноты выполнения целей исследования** является важным показателем качества диссертации. В данной работе достигнута поставленная цель, так как в полном объеме и со строгими выкладками решены те задачи, которые ведут к поставленной цели. В частности, разработаны специальные методы спектрального анализа дифференциальных операторов на отрезках и графах.

**Публикации.** Результаты диссертации опубликованы в 12 работах. Из них 2 статьи в рейтинговых журналах [34,36], 3 статьи в журналах, рекомендуемых ККСОН МОН РК, 3 тезиса в материалах международных конференций.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из 127 страниц, которые включают в себя введение, пять глав с разделами, заключение и список использованных источников.

Автор выражает глубокую благодарность научным руководителям:

1) Кангужину Балтабеку Есматовичу – (Казахский Национальный Университет имени аль – Фараби), доктору физико – математических наук, профессору.

2) Тихонову Сергею Юрьевичу – профессору, PhD, Каталонского института математических исследований ICREA Research Professor at CRM за постановку интересных задач, полезные советы и всестороннюю поддержку.

Автор благодарит Правительство Казахстана и Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби за поддержку и за возможность работать с зарубежным научным консультантом.

# 1 ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ПОЛНОТЫ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ

В начале приведены результаты, касающиеся системы экспонент. При этом важную роль играют понятия теории целых функций. В конце данного раздела дается применение указанных результатов при исследовании полноты корневых функций дифференциального оператора первого порядка.

## 1.1 О полноте систем экспонент

С момента своего появления в 1940 году «Теоремы о разрыве и плотности» Левинсона [6] были вдохновляющим источником методов и результатов в классическом анализе. После указанной работы Левинсона [6] наметились два основных направления:

- условия полноты в  $L^p$  на замкнутом конечном отрезке вещественной оси,
- условия полноты на каждом отрезке короче данного.

Первая тема иллюстрируется следующими двумя теоремами Левинсона [6].

**Теорема 1.1.1.** [6]. Полнота множества  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  не изменится, если  $\lambda$  заменить каким-либо другим числом  $\mu$ .

**Теорема 1.1.2.** [11]. Последовательность  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  полна в  $L^p$  на интервале длины  $2\pi D$ , если

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \left( \int_1^r \frac{\Lambda(t) - 2Dt}{t} dt + \frac{\log r}{q} \right) > -\infty.$$

Здесь  $\Lambda(t)$  — это беззнаковая счетная функция; то есть  $\Lambda(t)$  — это количество таких  $\lambda$ , которые удовлетворяют неравенству  $|\lambda| \leq t$ . Число  $q$  фигурирующее в теореме 2 определяется из равенства  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Вторая тема берет свое начало из следующей теоремы Левинсона [3].

**Теорема 1.1.3.** [12]. Пусть  $\{\lambda_n\}$  — действительная последовательность. Тогда

$$I(\lambda) \geq 2\pi \lim_{\xi \rightarrow 1+} \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{\Lambda(\xi u) - \Lambda(u)}{\xi u - u}. \quad (1.1.1)$$

Здесь  $I(\lambda)$  — интервал полноты  $\{\lambda_n\}$ . Правая часть последнего неравенства совпадает со значением  $D$  из теоремы 2.

Вторая тема завершается формулой Берлинга — Малявина для радиуса полноты [13]. Для формулировки результата Берлинга-Малявина нам надо ввести следующий класс функций:  $B(a, p)$  — обозначает класс целых функций  $F(z)$  представимых в виде  $F(z) = \int_{-a}^a e^{izt} f(t) dt$ , где  $f \in L^p[-a, a]$ . Также обозначим через  $B$  класс локально интегрируемых комплекснозначных функций  $\phi$  таких, что



$$\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{|\phi(x)|}{1+x^2} \right) dx < \infty.$$

**Теорема 1.1.4.** ([13]). Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ , пусть  $a > 0$ . Тогда идентичны следующие классы целых функций:

(i) целые функции экспоненциального типа, удовлетворяющие  $\log |F(x)| \in B$ ,

(ii) целые функции вида  $\frac{F_1}{F_2}$ , где  $F_2 \in B(a, p)$  и  $F_1 \in B(b, p)$  для некоторого  $b$ .

Приведем некоторые известные определения и факты. Множество функций  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  является неполным в  $L^p[-a, a]$ , если существует нетривиальная функция  $f \in L^p$ , ортогональная всем им. Это значит, что существует функция вида

$$F(z) = \int_{-a}^a e^{izt} f(t) dt, \quad f \in L^2, \quad \|f\|_p > 0, \quad (1.1.2)$$

такая, что  $F(\lambda_n) = 0$ . Если такой функции нет, то система полная. Отсюда следует, что изучение полноты практически совпадает с изучением нулей некоторых целых функций. Как указано в [6], это наблюдение восходит к [14].

Приведенное выше множество функций  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  замкнуто в  $L^p[-a, a]$ , если каждое  $f \in L^p$  на этом интервале может быть аппроксимировано по норме  $L^p$  линейными комбинациями функций  $e^{i\lambda_n x}$ . Двойственность показывает, что замыкание  $L^p$  эквивалентно полноте  $L^q$  для  $1 < p < \infty$ . Переход от замыкания к полноте и обратно позволяет получать нетривиальные результаты по системе экспонент  $\{e^{i\lambda_n x}\}$ .

Набор векторов в нормированном линейном пространстве минимален, если ни один из них не находится в замыкании подпространства, порожденного конечными линейными комбинациями других. Приведем одну важную теорему о минимальности

**Теорема 1.1.5.** [15]. Если множество  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  с различными  $\lambda_n$  не замкнуто на данном интервале, то оно минимально на этом отрезке.

Как указано выше, общее направление мысли, связывающее замыкание с нулями целых функций, берет свое начало в [14]. Мы приведем одну теорему из работы [14].

**Теорема 1.1.6.** [14]; [16]; [17]. Пусть  $\lambda_n \neq 0$  и

$$\sum \frac{1}{|\lambda_n|^{1+\varepsilon}} = \infty \quad \sum \left| \operatorname{Im} \frac{1}{\lambda_n} \right| = \infty \quad \frac{1}{|\lambda_n|^{\theta(n)}} = \infty,$$

где, в последнем случае,  $\theta(n) \geq 0$ ,  $\sum n^{-\theta(n)} < \infty$  и  $|\lambda_n|$  увеличивается с  $n$ . Тогда интервал полноты  $I(\lambda) = \infty$ .

Помимо обобщения известных результатов о рядах Фурье, следующая теорема Левинсона [18] дает примеры множеств, которые являются полными

в  $L^p$  на данном интервале, но не являются полными  $L^r$  ни при каком  $r < p$ . Другое применение теоремы Левинсона отмечено в [19].

**Теорема 1.1.7.** Множество  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  является полным в  $L^p[-\pi, \pi]$ , если  $|\lambda_n| \leq |n| + \frac{1}{2q}$ , и константа  $\frac{1}{2q}$  в этом утверждении точна.

Множество  $\{\lambda_n\}$  имеет избыток  $E(\lambda)$  на данном замкнутом интервале, если система  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  остается полной, когда удаляются  $E$  чисел из  $e^{i\lambda x}$ , но не при удалении  $E + 1$  чисел. Недостаток определяется аналогично или как отрицательный избыток. Условно,  $E = \infty$ , если произвольное количество чисел может быть удалено без потери полноты, и  $E = -\infty$ , если произвольное количество чисел может быть присоединено без получения полноты. Как и многие фундаментальные понятия теории полноты, понятие избытка принадлежит Р. Пэли и Н. Винеру [20].

В следующих теоремах сравниваются избытки двух последовательностей  $\{\lambda_n\}$  и  $\{\mu_n\}$ .

**Теорема 1.1.8.** [21]. Мы имеем  $I(\lambda) = I(\mu)$  и  $E(\lambda) = E(\mu)$ , если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\lambda_n - \mu_n|}{1 + |\operatorname{Im}\lambda_n| + |\operatorname{Im}\mu_n|} < \infty.$$

Дальнейшее уточнение достигается за счет использования следующего:

**Теорема 1.1.9.** [22]. Пусть  $\lambda_n$  пронумеровано так, что  $|\lambda_n|$  увеличивается с  $|n|$ , пусть  $|\lambda_n - \mu_n| = O\left(\frac{1}{|n|}\right)$  и пусть  $p = 2$ . Тогда  $I(\lambda) = I(\mu)$  и  $E(\lambda) = E(\mu)$ .

Теперь приведем нижние оценки для интервала полноты. Если  $R > 0$  и  $\{\lambda_n\}$  - действительная последовательность счетной функцией со знаком  $\Lambda$ , мы определяем

$$\Lambda^*(x, R) = \int_{x-R}^{x+R} \frac{\Lambda(u)}{u-x} dx = \int_0^R \frac{\Lambda(x+t) - \Lambda(x-t)}{t} dt. \quad (1.1.3)$$

Это же определение используется позже, когда  $\Lambda = \Lambda_\lambda - \Lambda_\mu$  разность двух счетных функций или когда  $\Lambda(u) = \Lambda_\lambda(u) - Du$ . Для рассматриваемого здесь случая  $\Lambda(u)$  возрастает, и правая часть (17) показывает, что  $\Lambda^*(x, R) \geq 0$ .

**Теорема 1.1.10.** [23] Если  $\{\lambda\}$  вещественно и неполно на отрезке длины  $2\pi D$ , то существует положительная функция  $K(x) \in B$  такая, что  $\Lambda^*(x, R) \leq 2DR + K(x)$ .

## 1.2 Полнота экспоненциальной системы на отрезке вещественной оси

Пусть  $\Lambda = \{\lambda_n\}$  последовательность всех нулей целой функций экспоненциального типа  $\Delta(\lambda) = 1 - i\lambda \int_0^1 f(t)e^{i\lambda t} dt$ . Рассмотрена экспоненциальная система функций  $e(\Lambda) = \{t^{p-1}e^{i\lambda_n t}, 1 \leq p \leq m_n\}$ , где  $m_n$  - кратность нуля  $\lambda_n$ . Ставится вопрос: при каких  $a, b$  ( $a < b$ ) система  $e(\Lambda)$  полна

(неполна) в пространстве  $L^2(a, b)$ ? Пусть  $D$  – длина индикаторной сопряженной диаграммы целой функции  $\Delta(\lambda)$ . Тогда верны утверждения:

- При  $b - a > D$  система  $e(\Lambda)$  не полна в  $L^2(a, b)$ ,
- При  $b - a < D$  система  $e(\Lambda)$  полна в  $L^2(a, b)$ ,
- Если из  $\Lambda$  исключить две точки  $\lambda$  и  $\mu$ , то система  $e(\Omega), \Omega = \Lambda \setminus \{\lambda, \mu\}$  не полна в  $L^2(a, b)$  и при  $b - a = D$ .

Пусть  $\Lambda = \{\lambda_n\}$  последовательность всех нулей целой функций экспоненциального типа

$$\Delta(\lambda) = 1 - i \lambda \int_0^1 f(t) e^{i\lambda t} dt, \quad \lambda = re^{i\varphi} = x + iy, \quad (1.2.1)$$

где  $f \in L^2(0, 1)$  (в последовательности  $\Lambda$  каждая  $\lambda_n$  точка повторяется столько раз, какова ее кратность  $m_n$ ). Считаем, что нельзя уменьшить интервал интегрирования, не изменяя значения интеграла: для любого положительного числа  $\varepsilon < \frac{1}{2}$  выполняются неравенства:

$$\int_{1-\varepsilon}^1 |f(t)|^2 dt > 0, \quad \int_0^\varepsilon |f(t) + 1|^2 dt > 0.$$

Рассмотрим систему экспонент (экспоненциальную систему)

$$e(\Lambda) = \{t^{p-1} e^{i\lambda_n t}, \quad 1 \leq p \leq m_n\}.$$

Ставится вопрос: при каких  $a, b$  ( $a < b$ ) система  $e(\Lambda)$  полна (неполна) в пространстве  $L^2(a, b)$  (или, что то же самое, в  $C[a, b]$ )?

Достаточно рассмотреть случай  $L^2(-\rho, \rho)$  (или  $C[-\rho, \rho]$ ), ибо полнота (или неполнота)  $e(\Lambda)$  инвариантна относительно сдвига аргумента. Поставленный вопрос сводится к выяснению величины  $\rho(\Lambda)$  – радиуса полноты системы  $e(\Lambda)$ . По определению,  $\rho(\Lambda)$  – это точная верхняя граница чисел  $\rho$ , для которых система  $e(\Lambda)$  полна в  $C[-\rho, \rho]$  (радиус полноты системы  $e(\Lambda)$  тот же и для пространства  $L^2(-\rho, \rho)$ ). Оценка радиуса полноты системы экспонент исследованы в [24]. В терминах целых функций  $\rho(\Lambda)$  можно трактовать как точную нижнюю границу типов целых функций  $F$  экспоненциального типа, ограниченных на  $\mathbb{R}$  и обращающихся в нуль на  $\Lambda$  [25]. Последнее означает, что в каждой точке  $\lambda_n \in \Lambda$  функция  $F$  обращается в нуль с кратностью не меньше  $m_n$ . Этот факт будем записывать так:  $F(\Lambda) = 0$ .

Имеем

$$\Delta(\lambda) = 1 - i \lambda e^{i\frac{\lambda}{2}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda t} g(t) dt, \quad g(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right).$$

Поскольку  $g \in L^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ , то функция

$$G(t) = \int_{-\frac{1}{2}}^t g(\tau) d\tau$$

абсолютно непрерывна на  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  и равенство (1.2.1) можно записать в виде

$$\Delta(\lambda) = 1 - i\lambda e^{i\frac{\lambda}{2}} P(\lambda),$$

где

$$P(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda t} dG(t)$$

- интеграл Лебега-Стилтьеса [26]. Так что  $\Lambda$  - нулевое множество целой функции экспоненциального типа

$$\Phi(\lambda) = e^{-i\frac{\lambda}{2}} - i\lambda P(\lambda). \quad (1.2.2)$$

Тип этой целой функции  $\sigma(\Phi) \leq \frac{1}{2}$ , (он может быть и меньше  $\frac{1}{2}$ ). Далее, индикатриса роста функции  $P(\lambda)$  есть  $h_p(\varphi) = \frac{1}{2} |\sin \varphi|$ . Это следует из того, что для почти всех  $\varphi$  существует предел [27]

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln |P(re^{i\varphi})|}{r} = \frac{1}{2} |\sin \varphi|.$$

А поскольку, как известно, функция  $h_p(\varphi)$  непрерывна, то  $h_p(\varphi) = \frac{1}{2} |\sin \varphi|$  для всех  $\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Далее, сопряженная диаграмма функции  $i\lambda P(\lambda)$  есть отрезок мнимой оси  $I = [-\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i]$ . Так что все особенности функции  $\gamma_p(\lambda)$ , ассоциированной с  $P(\lambda)$  по Борелю, содержатся в данном отрезке, причем точки  $t = \pm \frac{i}{2}$  - особые для  $\gamma_p(t)$ . Поскольку

$$\gamma_\Phi(t) = \frac{1}{t + \frac{i}{2}} - \gamma_p(t),$$

особенности функции  $\gamma_\Phi(t)$  также содержатся в отрезке  $I$ . Точка  $t = -\frac{i}{2}$  является, очевидно, особой для  $\gamma_\Phi(t)$ , но, возможно устранимой. Дело в том, что  $t = -\frac{i}{2}$  является особой для  $\gamma_p(t)$  и потому возможен случай, когда в точке  $t = -\frac{i}{2}$  функция  $\gamma_\Phi(t)$  голоморфна. Тогда длина сопряженной диаграммы  $J$  функции  $\Phi(\lambda)$  равна

$$|J| = h_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + h_\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 1.$$

Приведем достаточные условия, когда длина сопряженной диаграммы  $J$  функции  $\Phi(\lambda)$  равна единице. Для этого равенство (1.2.2) запишем в виде

$$\Phi(\lambda) = e^{-i\frac{\lambda}{2}} + \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} g(t) d(e^{i\lambda t}).$$

Если функция  $g(t)$  имеет ограниченную вариацию, интегрирование по частям дает

$$\Phi(\lambda) = e^{-i\frac{\lambda}{2}} \left(1 - g\left(-\frac{1}{2}\right)\right) - e^{i\frac{\lambda}{2}} g\left(\frac{1}{2}\right) + \Psi(\lambda),$$

где

$$\Psi(\lambda) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} e^{i\lambda t} d(g(t)).$$

Отсюда видно, что если  $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , причем в окрестностях точек  $\pm\frac{1}{2}$  функция  $g(t)$  не постоянна, то сопряженные диаграммы функций  $\Phi$  и  $\Psi$  совпадают  $J = \left[-\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i\right]$ .

Точки  $\pm\frac{1}{2}$  – особые для функции  $\gamma_\Psi(t)$ , ассоциированной по Борелю с  $\Psi(\lambda)$ , значит,

$$|J| = h_\Psi\left(-\frac{\pi}{2}\right) + h_\Psi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Таким образом, если функция  $f$  имеет ограниченную вариацию и не постоянна вблизи точек  $t = 0, t = 1$  и  $f(0) = -1, f(1) = 0$ , то  $|J| = 1$ .

Теперь рассмотрим другие варианты, когда функция  $g(t)$  может быть постоянной вблизи точек  $\pm\frac{1}{2}$  или в окрестности хотя бы одной из этих точек.

Если  $g(t)$  постоянна вблизи точки  $-\frac{1}{2}$  и  $g\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ , то  $|J| < 1$ . Если  $g(t)$  постоянна вблизи точки  $\frac{1}{2}$  и  $g\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ , то  $|J| < 1$ . Если  $g(t)$  постоянна в окрестностях обеих точек  $\pm\frac{1}{2}$  и  $g\left(-\frac{1}{2}\right) \neq -1, g\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$ , то  $|J| = 1$ , так как сопряженная диаграмма  $J_\Psi$  целой функции  $\Psi$  имеет длину меньше единицы, а сопряженная диаграмма целой функции

$$a(\lambda) = C_1 e^{-i\frac{\lambda}{2}} + C_2 e^{i\frac{\lambda}{2}}, \quad C_1 \neq 0, \quad C_2 \neq 0,$$

есть отрезок  $J_a = \left[-\frac{1}{2}i, \frac{1}{2}i\right]$ , причем  $J_\Psi \subset J_a$ .

Поскольку  $|\Phi(x)| = O(|x|)$  при  $x \rightarrow \infty$ , то целая функция  $\Phi(\lambda)$  принадлежит классу Картрайт  $C$ , то есть

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+ |\Phi(x)|}{1+x^2} dx < \infty.$$

По теореме Берлинга-Малявина о мультипликаторе [28],  $\rho(\Lambda) = \sigma(\Lambda)$ , где

$$\sigma(\Lambda) = \inf\{\sigma(F): F \in C, \quad F(\Lambda) = 0, F(z) \neq 0\}$$

(см. также [25]). Следовательно, радиус полноты системы  $e(\Lambda)$  удовлетворяет неравенству  $\rho(\Lambda) \leq \frac{1}{2}$ . Это означает, что система  $e(\Lambda)$  не полна в  $C[a, b]$  (или  $L^2(a, b)$ ), если  $b - a > 1$ .

Уточним этот факт. Для этого рассмотрим функцию  $\Phi_1(\lambda) = \Phi(\lambda)e^{i\alpha\lambda}$ , где  $\alpha = \frac{1-|J|}{2}$ . Тогда сопряженная диаграмма функции  $\Phi_1(\lambda)$  есть отрезок мнимой оси  $\left[-i\frac{|J|}{2}, i\frac{|J|}{2}\right]$ . Имеем также  $\Phi_1 \in C, \Phi_1(\Lambda) = 0$  (других нулей у этой функции нет). Таким образом, видим, что на самом деле  $\rho(\Lambda) = \frac{|J|}{2}$ . Это означает, что при  $\rho > \frac{|J|}{2}$  система  $e(\Lambda)$  не полна в  $C[-\rho, \rho]$  (или  $L^2(-\rho, \rho)$ ).

Убедимся, что при  $\rho < \frac{|J|}{2}$  система  $e(\Lambda)$  в указанных пространствах полна. Пусть  $e(\Lambda)$  не полна, например в  $C[-\rho, \rho]$  при  $\rho < \frac{|J|}{2}$ . Тогда существует целая функция экспоненциального типа вида

$$\Psi(\lambda) = \int_{-\rho}^{\rho} e^{i\lambda t} d\psi(t), \Psi(\lambda) \neq 0,$$

которая в точках  $\lambda_n$  имеет нули кратностей не меньших  $m_n$ . Пусть  $\rho_1 \leq \rho$ ,  $\rho_2 \leq \rho$ , такие, что в любых окрестностях точек  $\rho_1$  и  $\rho_2$  функция  $\psi(t)$  не постоянна. Тогда все нули функции  $\Psi$ , за исключением, быть может, множества нулевой плотности, лежат внутри углов  $S_1 = \{z: |\arg z| < \varepsilon\}$ ,  $S_2 = \{z: |\arg z - \pi| < \varepsilon\}$  ( $\varepsilon > 0$  — любое,  $\varepsilon < \frac{\pi}{2}$ ), причем множества нулей внутри каждого из углов  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) имеют плотности  $\Delta_i = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\pi}$  (см. [27]).

Рассмотрим теперь целую функцию экспоненциального типа

$$\Psi_1(\lambda) = \frac{\Phi_1(\lambda)}{(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)}.$$

У этой функции сопряженная диаграмма тот же отрезок  $\left[-\frac{|J|}{2}i, \frac{|J|}{2}i\right]$  причем  $\Psi_1(\Lambda_1) = 0$ , где  $\Lambda_1 = \Lambda \setminus \{\lambda_1, \lambda_2\}$ . Поскольку  $\Psi_1 \in L^2(R)$ , то по теореме Пэли-Винера найдется функция  $\psi_1 \in L^2\left[-\frac{|J|}{2}, \frac{|J|}{2}\right]$  такая, что

$$\Psi_1(\lambda) = \int_{-|J|/2}^{|J|/2} e^{i\lambda t} \psi_1(t) dt.$$

Поэтому, как следует из сказанного выше, в каждом из углов  $S_1$  и  $S_2$  соответствующие подпоследовательности нулевого множества  $\Lambda_1$  функции  $\Psi_1(\lambda)$  имеют плотности, равные  $\Delta^{(i)} = \frac{|J|}{2\pi}$  ( $i = 1, 2$ ). С другой стороны, поскольку у функции  $\Psi_1(\lambda)$  могут быть и другие нули

$$\Delta^{(i)} \leq \Delta_i = \frac{\rho_1 + \rho_2}{2\pi} < \frac{|J|}{2\pi} = \Delta^{(i)},$$

и тем самым, получили противоречие.

Таким образом, при  $\rho < \frac{|J|}{2}$  система  $e(\Lambda)$  полна в  $C[-\rho, \rho]$  (или  $L^2(-\rho, \rho)$ ).

Доказана, таким образом, в работе [36],

**Теорема 1.2.1.** Пусть  $\Lambda = \{\lambda_n\}$  — нулевое множество целой функции (1.2.1), а  $h_\Phi(\phi)$  — индикатриса роста целой функции  $\Phi(\lambda)$ , заданной формулой (1.2.2). Положим  $|J| = h_\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) + h_\Phi\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ . Тогда верны утверждения:

- 1) при  $|J| < b - a$  системы  $e(\Lambda)$  не полна в  $C[a, b]$  (или  $L^2(a, b)$ );
- 2) при  $|J| > b - a$  система  $e(\Lambda)$  полна в  $C[a, b]$  (или  $L^2(a, b)$ );
- 3) если из  $\Lambda$  исключить любые две точки, то система  $e(\Lambda_1)$  по оставшейся последовательности точек  $\Lambda_1$  не полна в  $C[a, b]$  (или  $L^2(a, b)$ ) и при  $b - a = |J|$ .

В частности, при  $|J| < 1$  система  $e(\Lambda)$  неполна в  $L^2(0, 1)$ , а при  $|J| > 1$  она полна в  $L^2(0, 1)$ . В последнем случае, например, существует целая функция

$$L(\lambda) = \int_0^1 e^{i\lambda t} d\mu(t), \quad d\mu(t) = \psi(t) dt,$$

где  $\psi \in L^2(0, 1)$ , такая что  $L(\Lambda) = 0$ ,  $L(\lambda) \neq 0$ .

Поскольку функция  $\mu(t)$  задает на  $(0,1)$  некоторую меру  $\mu$ , то можно вести речь о спектре этой меры.

Точка  $t_0 \in (0,1)$  называется точкой роста меры  $\mu$ , если  $\mu(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) > 0$  для любого  $\varepsilon > 0$ . Множество точек роста меры  $\mu$  замкнуто, его называют спектром  $S_\mu$  меры  $\mu$ . Носитель  $\Delta_\mu$  меры  $\mu$  – это наименьший отрезок, содержащий спектр  $S_\mu$ . В рассматриваемом случае

$$S_\mu \subset \Delta_\mu = [0,1].$$

Точка  $t_0 \in (0,1)$  называется точкой сосредоточения массы, если  $\mu(\{t_0\}) > 0$ . Ясно, что множество таких точек не более чем счетно (см. [29]). О более точной природе спектра  $S_\mu$  в рамках данной статьи что-либо сказать трудно.

Близкие вопросы, связанные с применением теоремы типа Берлинга-Малявина, также рассматриваются в [30].

### 1.3. Об одном применении Теоремы 1.2.1.

Здесь дается одно применение теоремы 1.2.1, которая доказана в предыдущем пункте.

В функциональном пространстве  $L_2(0,1)$  рассмотрим дифференциальное выражение первого порядка

$$l(y) = y'(x) + p_1(x)y(x), \quad 0 < x < 1,$$

где  $p_1(x)$  – суммируемая на  $(0,1)$  функция.

Сначала изучим вопрос: какими условиями надо дополнить дифференциальное выражение  $l(y)$ , чтобы соответствующий оператор  $K$  имел не пустое резольвентное множество? Не умоляя общности, можно считать,  $\lambda = 0$  принадлежит резольвентному множеству оператора  $K$ . Иначе говоря, будем считать, что существует обратный ограниченный оператор  $K^{-1}$ . Если существует  $K^{-1}$ , то операторная задача  $Ky(x) = f(x)$  при всех  $f \in L_2(0,1)$  имеет единственное решение  $y(x)$ , причем верна априорная оценка

$$\|y\|_{L_2} \leq C \|f\|_{L_2}, \quad (1.3.1)$$

где  $C$  – не зависит от  $f$ . Операторное уравнение  $Ky = f$  можно переписать в виде

$$l(y) = y'(x) + p_1(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1.3.2)$$

причем  $y \in D(K) \in W_2^1(0,1)$ .

Известно, что при любом  $a \in \mathbb{C}$  задача Коши

$$y'(x) + p_1(x)y(x) = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad (1.3.3)$$

$$y(0) = a, \quad (1.3.4)$$

имеет единственное решение. Таким образом, при всех  $a \in \mathbb{C}$  и всех  $f \in L_2(0,1)$  задача (1.3.3), (1.3.4) имеет единственное решение. Для описания области определения оператора  $K$  мы потребуем, чтобы константа  $a \in \mathbb{C}$  единственным образом вычислялась по правой части  $f \in L_2(0,1)$ . Следовательно,  $a(\cdot)$  – представляет линейный функционал над пространством  $L_2(0,1)$ . С другой стороны, из оценки (1.3.1) вытекает, что  $a(\cdot)$  линейный ограниченный функционал над  $L_2(0,1)$ . Из теоремы Рисса об общем виде

линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве  $L_2(0,1)$  имеем

$$a(f) = \int_0^1 f(x) \overline{\sigma_1(x)} dx,$$

где  $\sigma_1(x)$  – некоторая функция из  $L_2(0,1)$ .

Таким образом, область определения оператора  $K$  имеет вид

$$D(K) = \left\{ y \in W_2^1(0,1): y(0) - \int_0^1 \overline{\sigma_1(x)} l(y) dx = 0 \right\},$$

при некоторой функции  $\sigma_1 \in L_2(0,1)$ . Следовательно, в функциональном пространстве  $L_2(0,1)$  оператор  $K$  параметризуется элементом  $\sigma_1$  из  $L_2(0,1)$ .

Тогда задача на собственные значения для оператора  $K$  имеет вид

$$Ky = \lambda y, \quad y \in D(K) \quad (1.3.5)$$

или

$$\begin{cases} y'(x) + p_1(x)y(x) = \lambda y(x), & 0 < x < b \\ y(0) - \lambda \int_0^1 \overline{\sigma_1(x)} y(x) dx = 0. \end{cases}$$

Общее решение однородного уравнения  $y'(x) + p_1(x)y(x) = \lambda y(x)$  имеет вид

$$y(x) = C_1 \cdot e^{-\int_0^x p_1(\tau) d\tau} e^{\lambda x}.$$

Поэтому, учитывая граничное условие, получим **интервальное** представление характеристического определителя. Из соотношения

$$C_1 \left( 1 - \lambda \int_0^1 \overline{\sigma_1(x)} e^{-\int_0^x p_1(\tau) d\tau} e^{\lambda x} dx \right) = 0$$

вытекает

$$\tilde{\Delta}(\lambda) \equiv 1 - \lambda \int_0^1 \tilde{f}(x) e^{\lambda x} dx.$$

– характеристический определитель.

Теперь остается применить теорему 1.2.1.

**вставка**

## **2 ПОЛНОТА СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ШТУРМА – ЛИУВИЛЛЯ**

В предыдущем изучена полнота системы корневых функций дифференциального оператора первого порядка. В данном пункте исследуется полнота систем корневых функций оператора Штурма – Лиувилля.

### **2.1. О полноте системы корневых функций дифференциальных операторов второго порядка на отрезке**

В данном параграфе напомним общеизвестные понятия, введенные Марченко В.А. [7]. Он рассмотрел краевую задачу, порождаемую на интервале  $(0, 1)$ , уравнением Штурма-Лиувилля:

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 y(x) \quad (2.1.1)$$

и двумя ( $i = 1,2$ ) граничными условиями



$$\begin{cases} \Gamma_1(y) = a_{11}y(0) + a_{12}y'(0) + a_{13}y(1) + a_{14}y'(1) = 0, \\ \Gamma_2(y) = a_{21}y(0) + a_{22}y'(0) + a_{23}y(1) + a_{24}y'(1) = 0, \end{cases} \quad (2.1.2)$$

где  $q(x)$  – суммируемая комплекснозначная функция,  $a_{ik}$  – произвольные комплексные числа.

Значения параметра  $\mu = \lambda^2$ , при которых эта краевая задача имеет ненулевые решения, называются собственными значениями, а соответствующие решения – собственными функциями.

Фундаментальную систему решений уравнения (2.1.1), определяемую начальными данными

$$c(\lambda, 0) = s'(\lambda, 0) = 1, \quad c'(\lambda, 0) = s(\lambda, 0) = 0,$$

будем обозначать через  $c(\lambda, x)$ ,  $s(\lambda, x)$ . Так как общее решение (2.1.1) есть линейная комбинация  $z(\lambda, x) = A_1c(\lambda, x) + A_2s(\lambda, x)$ , то

$$\Gamma_i(z) = A_1[a_{i1} + a_{i3}c(\lambda, 1) + a_{i4}c'(\lambda, 1)] + A_2[a_{i2} + a_{i3}s(\lambda, 1) + a_{i4}s'(\lambda, 1)]. \quad (2.1.3)$$

Откуда следует, что краевая задача (2.1.1), (2.1.2) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда система уравнений

$$A_1[a_{11} + a_{13}c(\lambda, 1) + a_{14}c'(\lambda, 1)] + A_2[a_{12} + a_{13}s(\lambda, 1) + a_{14}s'(\lambda, 1)] = 0,$$

$$A_1[a_{21} + a_{23}c(\lambda, 1) + a_{24}c'(\lambda, 1)] + A_2[a_{22} + a_{23}s(\lambda, 1) + a_{24}s'(\lambda, 1)] = 0$$

относительно коэффициентов  $A_1, A_2$  имеет ненулевое решение. Поэтому собственные значения рассматриваемой задачи совпадают с квадратами корней ее характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} + a_{13}c(\lambda, 1) + a_{14}c'(\lambda, 1) & a_{12} + a_{13}s(\lambda, 1) + a_{14}s'(\lambda, 1) \\ a_{21} + a_{23}c(\lambda, 1) + a_{24}c'(\lambda, 1) & a_{22} + a_{23}s(\lambda, 1) + a_{24}s'(\lambda, 1) \end{vmatrix}. \quad (2.1.4)$$

Раскрывая этот определитель и замечая, что вронскиан  $W(c, s) = c(\lambda, x)s'(\lambda, x) - c'(\lambda, x)s(\lambda, x) \equiv 1$ , находим

$$\Delta(\lambda) = A_{12} + A_{34} + A_{13}s(\lambda, 1) + A_{14}s'(\lambda, 1) + A_{32}c(\lambda, 1) + A_{42}c'(\lambda, 1), \quad (2.1.4')$$

где  $A_{\alpha\beta} = a_{1\alpha}a_{2\beta} - a_{2\alpha}a_{1\beta}$  – определитель из  $\alpha$ - и  $\beta$ -го, столбцов матрицы коэффициентов граничных условий  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}$ .

Обозначим через  $\Delta_{ik} = \Delta_{ik}(\lambda)$  элементы определителя (2.1.4) и построим такие решения уравнения (2.1.1):

$$\omega_i(\lambda, x) = \Delta_{i2}c(\lambda, x) - \Delta_{i1}s(\lambda, x). \quad (2.1.5)$$

Из формулы (2.1.3) следует, что тождественно относительно  $\lambda$

$$\Gamma_1(\omega_1) = \Gamma_2(\omega_2) = 0,$$

$$\Gamma_1(\omega_2) = -\Gamma_2(\omega_1) = \Delta_{11}(\lambda)\Delta_{22}(\lambda) - \Delta_{12}(\lambda)\Delta_{21}(\lambda) = \Delta(\lambda).$$

Собственное значение  $\mu_n$  краевой задачи (2.1.1), (2.1.2) называется  $p$ -кратным, если  $\mu_n$  является корнем кратности  $p$  определителя  $\Delta(\sqrt{\mu})$ . Так как

$$\frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \Gamma_i(\omega_j) = \Gamma_i\left(\frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \omega_j\right) \quad (\mu = \lambda^2),$$

то функции

$$\omega_{i,k}(x) = \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \omega_i(\lambda, x) \quad (\mu = \lambda^2) \quad (2.1.6)$$

при  $\lambda^2 = \mu_n$  удовлетворяют обоим граничным условиям (2.1.2), если  $0 \leq k \leq p - 1$ . Функции  $\omega_{i,0}(x), \dots, \omega_{i,p-1}(x)$  ( $i = 1, 2$ ) образуют цепочку, в которой

первая отличная от нуля функция  $\omega_{i,l_i}(x)$  является собственной, а следующие – присоединенными к ней функциями. Дифференцируя уравнение (2.1.1)  $k$  раз по  $\mu = \lambda^2$ , заключаем, что собственная и присоединенные функции цепочки удовлетворяют уравнениям

$$-\omega_{i,k}(x) + q(x)\omega_{i,k}(x) = \mu_n\omega_{i,k}(x) - \omega_{i,k-1}(x)$$

и граничным условиям (2.1.2). Во избежание недоразумений подчеркиваем, что обе цепочки,  $\omega_{1,0}(x), \dots, \omega_{1,p-1}(x)$  и  $\omega_{2,0}(x), \dots, \omega_{2,p-1}(x)$ , могут состоять из одних и тех же функций. Для нас существенно лишь, что кроме собственных и присоединенных функций в состав цепочек могут входить только функции, тождественно равные нулю.

Центральное место в спектральной теории краевых задач (2.1.1), (2.1.2) занимает теорема о полноте в пространстве  $L_2(0,1)$  системы собственных и присоединенных функций, соответствующих всевозможным собственным значениям. Как известно, для полноты какой-нибудь системы векторов гильбертова пространства необходимо и достаточно, чтобы любой вектор, ортогональный всем векторам этой системы, был равен нулю. Пусть  $M$  — спектр, т. е. множество всех собственных значений  $\mu_n$  краевой задачи (2.1.1), (2.1.2),  $p_n$  – их кратности. Согласно предыдущему функции

$$\frac{(-1)^k}{k!} \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \omega_i(\sqrt{\mu}, x) \Big|_{\mu=\mu_n} \quad (0 \leq k \leq p_n - 1, \quad \mu_n \in M, \quad i = 1,2)$$

либо тождественно равны нулю, либо являются собственными или присоединенными функциями этой краевой задачи. Следовательно, для доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций достаточно показать, что если  $f(x) \in L_2(0,1)$  и

$$\int_0^1 \frac{\partial^k}{\partial \mu^k} \omega_i(\sqrt{\mu}, x) f(x) dx \Big|_{\mu=\mu_n} = 0 \quad (2.1.7)$$

при всех  $\mu_n \in M$ ,  $k = 0, 1, \dots, p_n - 1$ ,  $i = 1, 2$ , то  $f(x) = 0$  почти всюду. Характеристический определитель  $\Delta(\sqrt{\mu})$  и функции

$$\omega_i(\sqrt{\mu}, f) = \int_0^1 \omega_i(\sqrt{\mu}, x) f(x) dx \quad (i = 1,2) \quad (2.1.8)$$

являются целыми функциями  $\mu$ . Если выполняются равенства (2.1.7), то каждый  $p_n$  – кратный корень  $\mu_n$  определителя  $\Delta(\sqrt{\mu})$  будет также корнем не меньшей кратности обеих функций  $\omega_i(\sqrt{\mu}, f)$  ( $i = 1, 2$ ). Поэтому равенства (2.1.7) выполняются тогда и только тогда, когда функции  $\omega_i(\sqrt{\mu}, f) [\Delta(\sqrt{\mu})]^{-1}$  ( $i = 1, 2$ ), а вместе с ними и функции  $\omega_i(\lambda, f) [\Delta(\lambda)]^{-1}$  целые. Следовательно, для доказательства полноты системы собственных и присоединенных функций краевой задачи (2.1.1), (2.1.2) достаточно показать, что функции  $\omega_i(\lambda, f) [\Delta(\lambda)]^{-1}$  ( $i = 1, 2$ ) могут быть целыми только тогда, когда  $f(x) = 0$  почти всюду. До сих пор мы не накладывали никаких ограничений на граничные условия (2.1.2). Так же как в монографии [7] заметим теперь, что

при  $q(x) \equiv 0$  характеристическая функция  $\Delta_0(\lambda)$  краевой задачи (2.1.1), (2.1.2) имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = (A_{12} + A_{34}) + A_{13} \frac{\sin \lambda}{\lambda} + (A_{14} + A_{32}) \cos \lambda + A_{42} \lambda \sin \lambda$$

и в этом простейшем случае вопрос о полноте системы собственных и присоединенных функций имеет смысл ставить только для тех граничных условий, при которых функция  $\Delta_0(\lambda)$  отлична от константы. Это, очевидно, может выполняться лишь в следующих трех случаях:

- 1)  $A_{42} \neq 0$ ;
- 2)  $A_{42} = 0, A_{14} + A_{32} \neq 0$ ;
- 3)  $A_{42} = 0, A_{14} + A_{32} = 0; A_{13} \neq 0$ ;

(2.1.9)

Граничные условия, удовлетворяющие одному из этих соотношений, называются невырожденными в смысле Марченко В.А. [7].

Наиболее полный результат о полноте системы СПФ задачи (2.1.1)–(2.1.2) получен в [7, теорема 1.3.1].

**Теорема 2.1.1.** [7]. Пусть произвольный элемент  $q(\cdot)$  из пространства  $L_1(0,1)$  и краевые условия (2.1.2) являются невырожденными. Тогда система СПФ задачи (2.1.1)–(2.1.2) полна в  $L_p(0,1)$  при любом  $p \in [1, \infty)$ .

Отметим, что класс невырожденных краевых условий шире класса регулярных условий в смысле Биркгофа [9].

При  $q = 0$  невырожденность краевых условий (2.1.2) необходима для полноты системы СПФ в пространстве  $L_p(0,1)$ . При  $q \neq 0$  это уже не так даже в случае вещественных  $q$ .

В работе [8] изучаются невырожденные краевые задачи (2.1.1)–(2.1.2) в случае вырожденных краевых условий (2.1.2), т. е. в случае  $\Delta_0(\lambda) = const$ . Для ясности изложения напомним определение введенные Маламудом М.М. из работы [8].

**Определение 2.1.1.** (i) Краевую задачу (2.1.1)–(2.1.2) будем называть невырожденной, если  $\Delta(\lambda) \neq const$ , то есть  $|A_{13}| + |A_{14}| + |A_{32}| + |A_{42}| \neq 0$ .

(ii) Краевые условия (2.1.2) называют невырожденными, если  $\Delta_0(\lambda) \neq const$ , то есть  $|A_{13}| + |A_{42}| + |A_{14} + A_{32}| \neq 0$ .

Подчеркнем, что невырожденность краевых условий (2.1.2) не зависит от выбора потенциала  $q$  и влечет за собой невырожденность краевой задачи (2.1.1)–(2.1.2) при любом  $q \in L_1(0,1)$ . Обратное неверно.

В этом случае матрица коэффициентов  $A$  краевых условий (2.1.2) имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha\alpha_1 & \alpha\alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 & -\alpha\beta_1 & \alpha\beta_2 \end{pmatrix}, \quad J_{12} = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \quad (2.1.10)$$

Следующая теорема — основной результат работы [8].

**Теорема 2.1.2** [8]. Пусть краевая задача (2.1.1)–(2.1.2) является невырожденной и  $p \in [1, \infty)$ . Если  $q(\cdot) \in C^k[0,1]$  при некотором  $k \in \mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$  и

$$q^{(k)} \neq (-1)^k q^{(k)}(1), \quad (2.1.11)$$

то система СПФ задачи (1)–(2) полна и минимальна в  $L_p(0,1)$ .

В работе [8] сформулированы следующие необходимые условия полноты.

Пусть  $q \in L_1(0,1)$ . Положим  $\tilde{q}(x) := q(x) - q(\pi - x)$ .

**Теорема 2.1.3** [8]. Пусть условия (2.1.2) вырожденны, а краевая задача (2.1.1)–(2.1.2) — невырожденна. Тогда условие  $0 \in \text{supp } \tilde{q}$  необходимо для полноты в  $L_p(0,1)$  системы СПФ задачи (2.1.1)–(2.1.2). При его нарушении дефект системы СПФ бесконечен.

**Следствие 2.1.1** [8]. Пусть  $\tilde{q}(\cdot)$  аналитична в окрестности точки 0. Тогда условие  $0 \in \text{supp } \tilde{q}$  является критерием полноты в  $L_p(0,1)$ ,  $p \in [1, \infty)$ , системы СПФ задачи (2.1.1)–(2.1.2).

## 2.2. О полноте вырожденных двухточечных краевых задач Штурма-Лиувилля на отрезке

В данном пункте расширяется класс невырожденных двухточечных граничных задач для уравнения Штурма-Лиувилля, имеющих полную систему собственных и присоединенных функций в специальных функциональных пространствах. Указанные специальные пространства зависят от длины носителя потенциала уравнения Штурма-Лиувилля. Сформулированные результаты уточняют известные результаты Марченко В.А. [7] и результаты Маламуда М.М. [8]. Двухточечные краевые задачи для уравнения Штурма-Лиувилля делятся на вырожденные и невырожденные по Марченко В.А. граничные условия. Основным результатом Марченко В.А. утверждает, что системы собственных и присоединенных функций невырожденных граничных задач для уравнения Штурма-Лиувилля в пространстве квадратично суммируемых функций образуют полную систему функций. В данном пункте результат Марченко В.А. уточняется в следующем направлении. Среди вырожденных граничных задач по Марченко В.А. имеются задачи с полной системой собственных и присоединенных функций в пространстве квадратично суммируемых функций. Наличие свойства полноты зависит от длины носителя меры антисимметрии носителя потенциала уравнения Штурма-Лиувилля.

Пусть  $n = 2\mu$  и на отрезке  $[0,1]$  задано самосопряженное дифференциальное выражение с вещественными коэффициентами

$$l(y) \equiv (p_0 y^{(\mu)})^{(\mu)} + (p_1 y^{(\mu-1)})^{(\mu-1)} + \dots + (p_{\mu-1} y^{(1)})^{(1)} + p_\mu y,$$

где  $p_0, \dots, p_\mu$  — достаточно гладкие функции.

Пусть также задана система линейных функционалов  $\{U_1, \dots, U_n\}$ . Обозначим через  $B_p$  оператор, порожденный дифференциальным выражением  $l(\cdot)$  и граничными условиями

$$U_j(y) = 0, j = 1, \dots, n$$

В данном пункте исследуется влияние коэффициентов  $p_0, \dots, p_\mu$  оператора  $B_p$  на структуру спектра оператора и на полноту в  $L_2(0,1)$  системе корневых функций.

Введем стандартным образом фундаментальную систему решений  $\{y_1(x, \lambda), \dots, y_n(x, \lambda)\}$  однородного дифференциального уравнения

$$l(y) = \lambda y(x), \quad (2.2.1)$$

подчиненную набору условия  $y_k^{(j-1)}(0) = \delta_{jk}$ . Обозначим через  $\Delta_p(\lambda)$  характеристический определитель оператора  $B_p$ , задаваемый по формуле

$$\Delta_p(\lambda) = \det\{\|U_j(y_k)\|\}$$

Известно [9], что  $\Delta_p(\lambda)$  – целая функция экспоненциального типа по параметру  $\lambda$ . Нули целой функций  $\Delta_p(\lambda)$  однозначно характеризуют спектр оператора  $B_p$ . Если  $\lambda_s$  – собственное значение оператора  $B_p$  кратности  $m_s$ , то  $\lambda_s$  – нуль  $\Delta_p(\lambda)$  кратности  $m_s$ . Верно и обратное утверждение.

Заметим, что нули целой функции  $\Delta_p(\lambda)$  могут образовывать:

- Пустое множество,
- Конечное непустое множество,
- Счетное множество без конечных предельных точек,
- Множество, совпадающее с комплексной  $\lambda$  – плоскостью.

Первый случай реализуется в случае, когда оператор  $B_p$  соответствует задаче Коши. Заметим, что имеются примеры операторов с пустым спектром, хотя краевые условия

$$U_j(y) = 0, j = 1, \dots, n$$

не являются условиями Коши. Операторы с пустым спектром часто называют вольтерровыми операторами. Примеры вольтерровых трехточечных краевых задач для дифференциальных операторов второго порядка можно найти в работе Джумабаева С.А., Нурахметова Д.Б. [31].

До сих пор нет примеров дифференциальных операторов с непустым конечным спектром. Доказано, что если спектр оператора  $B_p$  представляет непустое конечное множество, то его мощность не больше  $\mu$ . В случае  $n = 2$  Кальменов Т.Ш. и Шалданбаев А. [32] доказали невозможность существования краевых задач с непустым конечным спектром.

Когда спектр оператора  $B_p$  представляет счетное множество без конечных предельных точек, то говорят оператор  $B_p$  имеет дискретный спектр. Дискретность оператора – частое явление.

Реже встречаются операторы со спектром, совпадающим со всей комплексной плоскостью. Подобные примеры двухточечных краевых задач для дифференциальных операторов высших порядков приведены в работе [33].

В случае дифференциальных операторов второго порядка с двухточечными граничными условиями полно изучены в монографии Марченко В.А. [7]. Основной результат из [7] интересующий нас: выделены невырожденные двухточечные граничные условия для дифференциального

уравнения второго порядка и доказана полнота соответствующей системы корневых функций в пространстве  $L_2(0, 1)$ .

В данном пункте диссертации уточняется указанный результат Марченко В.А. Расширен класс невырожденных граничных условий, для которых все еще сохраняется свойство полноты в специальном функциональном пространстве.

### 2.3 Интегральное представление характеристического определителя двухточечной граничной задачи для уравнения Штурма-Лиувилля

Для формулировки результатов работы [34] нам необходимы некоторые обозначения и понятия.

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$-y^{(2)} + q(x)y = \lambda y, 0 < x < 1 \quad (2.3.1)$$

с граничными условиями

$$U_j(y) \equiv a_{i1}y(0) + a_{i2}y^{(1)}(0) + a_{i3}y(1) + a_{i4}y^{(1)}(1) = 0, i = 1, 2. \quad (2.3.2)$$

Здесь  $q(x)$  – суммируемая на  $(0, 1)$  функция,  $a_{ij}$  – комплексные числа.

Для удобства записи, введем следующие обозначения

$$U_{i0}(y) \equiv a_{i1}y(0) + a_{i2}y'(0),$$

$$U_{i1}(y) \equiv a_{i3}y(1) + a_{i4}y'(1).$$

Для дальнейших целей удобно ввести матрицу граничных коэффициентов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

причем  $\text{rank } A = 2$ .

Удобно через  $A_{ij}$  обозначить минор матрицы  $A$ , составленный из столбцов с номерами  $i$  и  $j$ .

$$A_{ij} = \det \begin{bmatrix} a_{1i} & a_{1j} \\ a_{2i} & a_{2j} \end{bmatrix} \text{ при } 1 \leq i < j \leq 4.$$

$$\text{К примеру, } A_{43} = \det \begin{bmatrix} a_{14} & a_{13} \\ a_{24} & a_{23} \end{bmatrix}; A_{34} = \det \begin{bmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{bmatrix}.$$

Нам также удобно ввести симметричную относительно  $x = \frac{1}{2}$  функцию

$$\hat{q}(x) = \begin{cases} q(1-x), & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ q(x), & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases}$$

Для наглядности приведем графики двух функций (рисунок 1)  
 $y = q(x), 0 < x < 1$  и  $y = \hat{q}(x), 0 < x < 1$ .

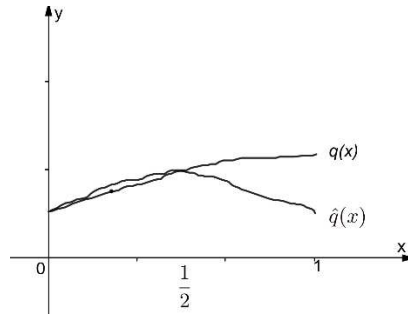


Рисунок 1. Мера несимметричности

Разность  $q(x) - \hat{q}(x)$  обозначим через  $Q(x)$ ,  $0 < x < 1$  и будем называть ее мерой несимметричности функции  $q(x)$ . Понятно, что

$$Q(x) \equiv 0, \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}.$$

Наряду с уравнением (2.3.1) рассмотрим следующее уравнение с симметричным потенциалом

$$-u''(x) + \hat{q}(x)u(x) = \lambda u(x), \quad 0 < x < 1. \quad (2.3.3)$$

Введем фундаментальную систему решений однородного уравнения (2.3.3). Пусть  $\hat{s}(x, \lambda)$  – решение уравнения (2.3.3), удовлетворяющее условиям Коши в точке  $x = \frac{1}{2}$ :

$$\hat{s}\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 0; \quad \hat{s}'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 1$$

А также  $\hat{c}(x, \lambda)$  – решение уравнения (2.3.3), удовлетворяющее условиям Коши в точке  $x = \frac{1}{2}$ :

$$\hat{c}\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 1; \quad \hat{c}'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 0$$

Аналогично вводятся решения  $c(x, \lambda)$ ,  $s(x, \lambda)$  связанные с уравнением (2.3.1).

**Лемма 2.3.1.** Для решений  $\hat{c}(x, \lambda)$  и  $\hat{s}(x, \lambda)$  выполняются соотношения  $\hat{c}(x, \lambda) = \hat{c}(1-x, \lambda)$ ,  $\hat{s}(x, \lambda) = -\hat{s}(1-x, \lambda)$  при  $0 < x < 1$

**Доказательство.** Доказательство приведем только для функций  $\hat{c}(x, \lambda)$ . Известно [7], что  $\hat{c}(x, \lambda)$  является решением интегрального уравнения

$$\hat{c}(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) \hat{c}(t, \lambda) dt.$$

Проверим  $\hat{c}\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 1$ ;  $\hat{c}'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 0$

$$\hat{c}'(x, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} \left(x - \frac{1}{2}\right) + \int_{\frac{1}{2}}^x \cos \sqrt{\lambda}(x-t) \hat{q}(t) \hat{c}(t, \lambda) dt$$

$$\hat{c}''(x, \lambda) = -\lambda \cos \sqrt{\lambda} \left(x - \frac{1}{2}\right) - \int_{\frac{1}{2}}^x \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(x-t) \hat{q}(t) \hat{c}(t, \lambda) dt + \hat{q}(x) \hat{c}(x, \lambda)$$

$$\hat{c}''(x, \lambda) = -\lambda \hat{c} + \hat{q}(x) \hat{c}(x, \lambda)$$

$$-\hat{c}''(x, \lambda) + \hat{q}(x) \hat{c}(x, \lambda) = \lambda \hat{c} \quad (2.3.3)$$

Приведенное интегральное уравнение решим методом последовательных приближений

$$\hat{c}(x, \lambda) = h_0(x, \lambda) + h_1(x, \lambda) + h_2(x, \lambda) + \dots, \quad \text{где}$$

$$h_0(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} \left(x - \frac{1}{2}\right)$$

$$h_{k+1}(x, \lambda) = \int_{1/2}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) h_k(t) dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Остается проверить, что выполняется соотношение при всех  $k = 0, 1, 2, \dots$

$$h_{k+1}(x, \lambda) = h_{k+1}(1-x, \lambda), \quad 0 < x < 1$$

Иначе говоря, надо проверить тождество

$$\int_{1/2}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) h_k(t) dt = \int_{1/2}^{1-x} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) h_k(t) dt$$

Рассмотрим интеграл

$$\begin{aligned} \int_{1/2}^{1-x} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(1-x-t)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(t) h_k(t) dt &= \left\{ \begin{array}{lll} \tau = 1-t & t = \frac{1}{2} & \tau = \frac{1}{2} \\ t = 1-\tau & t = 1-x & \tau = x \\ dt = -d\tau & & \end{array} \right\} = \\ &= - \int_{1/2}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\tau-x)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(1-\tau) h_k(1-\tau) d\tau = \\ &= \int_{1/2}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-\tau)}{\sqrt{\lambda}} \hat{q}(\tau) h_k(\tau) d\tau = h_{k+1}(x, \lambda). \end{aligned}$$

Лемма 2.3.1. полностью доказана для случая  $c(x, \lambda)$ . Аналогично доказывается для функции  $s(x, \lambda)$ .

В следующей лемме решения  $c(x, \lambda), s(x, \lambda)$  выразим через  $\hat{c}(x, \lambda), \hat{s}(x, \lambda)$ .

**Лемма 2.3.2.** Решение  $c(x, \lambda)$  является решением следующего интегрального уравнения

$$c(x, \lambda) = \hat{c}(x, \lambda) + \int_{1/2}^x \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(x, \lambda) & \hat{s}(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) c(t, \lambda) dt.$$

**Лемма 2.3.3.** Решение  $s(x, \lambda)$  является решением следующего интегрального уравнения

$$s(x, \lambda) = \hat{s}(x, \lambda) + \int_{1/2}^x \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(x, \lambda) & \hat{s}(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) s(t, \lambda) dt.$$

**Доказательство леммы 2.3.2.**

Сначала проверим выполнение первого условия Коши  $c\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = \hat{c}\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 1$ .



Вычислим первую производную  $c(x, \lambda)$ . В результате имеем

$$c'(x, \lambda) = \hat{c}'(x, \lambda) + \int_{1/2}^x \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}'(x, \lambda) & \hat{s}'(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t)c(t, \lambda) dt$$

Теперь проверим выполнение второго условия Коши  $c'(\frac{1}{2}, \lambda) = \hat{c}'(\frac{1}{2}, \lambda) = 0$ .

Вычислим вторую производную  $c(x, \lambda)$ . В результате имеем

$$c''(x, \lambda) = \hat{c}''(x, \lambda) + \int_{1/2}^x \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}''(x, \lambda) & \hat{s}''(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t)c(t, \lambda) dt + \begin{vmatrix} \hat{c}(x, \lambda) & \hat{s}(x, \lambda) \\ \hat{c}'(x, \lambda) & \hat{s}'(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(x)c(x, \lambda).$$

Отсюда получим равенство

$$c''(x, \lambda) = (\hat{q}(x) - \lambda)\hat{c}(x, \lambda) + (\hat{q}(x) - \lambda) \int_{1/2}^x \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(x, \lambda) & \hat{s}(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t)c(t, \lambda) dt + Q(x)c(x, \lambda).$$

Или

$$c''(x, \lambda) = (\hat{q}(x) - \lambda)c(x, \lambda) + Q(x)c(x, \lambda).$$

Так как  $Q(x) = q(x) - \hat{q}(x)$ , то окончательно получаем

$$c'(x, \lambda) = -\lambda c(x, \lambda) + q(x)c(x, \lambda).$$

Лемма 2.3.2 полностью доказана.

Лемма 2.3.3 доказывается точно также как и доказывается лемма 2.3.2.

Согласно монографии [7] введем характеристический определитель

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(c) & U_1(s) \\ U_2(c) & U_2(s) \end{vmatrix}.$$

К примеру,

$$U_1(c) = a_{11}c(0, \lambda) + a_{12}c'(0, \lambda) + a_{13}c(1, \lambda) + a_{14}c'(1, \lambda).$$

**Лемма 2.3.4.** Если  $\lambda = \lambda_0$  нуль характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$  кратности  $m_0$ , то  $\lambda_0$  – собственное значение задачи (2.3.1) – (2.3.2) алгебраической кратности  $m_0$ .

Лемма 2.3.4. доказана в монографии [7].

Заметим, что  $\Delta(\lambda)$  – целая функция [9] от  $\lambda$ .

Точно также вводим характеристический определитель

$$\widehat{\Delta}(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\hat{c}) & U_1(\hat{s}) \\ U_2(\hat{c}) & U_2(\hat{s}) \end{vmatrix}$$

**Лемма 2.3.5.** Справедлива формула

$$\widehat{\Delta}(\lambda) = (A_{12} + A_{14} + A_{32} + A_{34}) + 2(A_{14} + A_{32})\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) + 2A_{24}\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) + 2A_{31}\hat{c}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda)$$

**Доказательство леммы 2.3.5.** Вычислим сначала

$$U_1(\hat{c}) = a_{11}\hat{c}(0, \lambda) + a_{12}\hat{c}'(0, \lambda) + a_{13}\hat{c}(1, \lambda) + a_{14}\hat{c}'(1, \lambda) == \begin{vmatrix} \hat{c}(0, \lambda) = \hat{c}(1, \lambda) \\ \hat{c}'(0, \lambda) = -\hat{c}'(1, \lambda) \end{vmatrix} = (a_{11} + a_{13})\hat{c}(0, \lambda) + (a_{12} - a_{14})\hat{c}'(0, \lambda).$$

Точно также вычисляются значения

$$U_1(\hat{s}) = (a_{11} - a_{13})\hat{s}(0, \lambda) + (a_{12} + a_{14})\hat{s}'(0, \lambda)$$

$$\begin{aligned} U_2(\hat{c}) &= (a_{21} + a_{23})\hat{c}(0, \lambda) + (a_{22} - a_{24})\hat{c}'(0, \lambda) \\ U_2(\hat{s}) &= (a_{21} - a_{23})\hat{s}(0, \lambda) + (a_{22} + a_{24})\hat{s}'(0, \lambda) \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\widehat{\Delta}(\lambda) = \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{13})\hat{c}(0, \lambda) + (a_{12} - a_{14})\hat{c}'(0, \lambda) & (a_{11} - a_{13})\hat{s}(0, \lambda) + (a_{12} + a_{14})\hat{s}'(0, \lambda) \\ (a_{21} + a_{23})\hat{c}(0, \lambda) + (a_{22} - a_{24})\hat{c}'(0, \lambda) & (a_{21} - a_{23})\hat{s}(0, \lambda) + (a_{22} + a_{24})\hat{s}'(0, \lambda) \end{vmatrix}$$

Из курса линейной алгебры [35] известно, что

$$\begin{vmatrix} a + b & e \\ c + d & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & e \\ d & f \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(\lambda) &= \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{13})\hat{c}(0, \lambda) & (a_{11} - a_{13})\hat{s}(0, \lambda) \\ (a_{21} + a_{23})\hat{c}(0, \lambda) & (a_{21} - a_{23})\hat{s}(0, \lambda) \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} (a_{12} - a_{14})\hat{c}'(0, \lambda) & (a_{11} - a_{13})\hat{s}(0, \lambda) \\ (a_{22} - a_{24})\hat{c}'(0, \lambda) & (a_{21} - a_{23})\hat{s}(0, \lambda) \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} (a_{11} + a_{13})\hat{c}(0, \lambda) & (a_{12} + a_{14})\hat{s}'(0, \lambda) \\ (a_{21} + a_{23})\hat{c}(0, \lambda) & (a_{22} + a_{24})\hat{s}'(0, \lambda) \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} (a_{12} - a_{14})\hat{c}'(0, \lambda) & (a_{12} + a_{14})\hat{s}'(0, \lambda) \\ (a_{22} - a_{24})\hat{c}'(0, \lambda) & (a_{22} + a_{24})\hat{s}'(0, \lambda) \end{vmatrix} = \\ \hat{c}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) &\begin{vmatrix} a_{11} + a_{13} & a_{11} - a_{13} \\ a_{21} + a_{23} & a_{21} - a_{23} \end{vmatrix} + \hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) \begin{vmatrix} a_{12} - a_{14} & a_{11} - a_{13} \\ a_{22} - a_{24} & a_{21} - a_{23} \end{vmatrix} + \\ \hat{c}(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) &\begin{vmatrix} a_{11} + a_{13} & a_{12} + a_{14} \\ a_{21} + a_{23} & a_{22} + a_{24} \end{vmatrix} + \hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) \begin{vmatrix} a_{12} - a_{14} & a_{12} + a_{14} \\ a_{22} - a_{24} & a_{22} + a_{24} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$\begin{aligned} \widehat{\Delta}(\lambda) &= 2A_{24}\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) + 2A_{31}\hat{c}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) \\ &+ (A_{21} + A_{14} + A_{32} + A_{43})\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) \\ &+ (A_{12} + A_{14} + A_{32} + A_{34})\hat{c}(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) \\ &= \left\{ \begin{vmatrix} \hat{c}(0, \lambda) & \hat{s}(0, \lambda) \\ \hat{c}'(0, \lambda) & \hat{s}'(0, \lambda) \end{vmatrix} = 1 \Rightarrow \hat{c}(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) = 1 + \hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) \right\} \\ &= (A_{12} + A_{14} + A_{32} + A_{34}) + 2(A_{14} + A_{32})\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) \\ &+ 2A_{24}\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) + 2A_{31}\hat{c}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda). \end{aligned}$$

Лемма 2.3.5 полностью доказана.

Из леммы 2.3.1 вытекают следствия.

**Следствие 2.3.1.** Если  $A_{24} = 0, A_{32} + A_{14} = 0, A_{31} = 0$ , то характеристический определитель  $\widehat{\Delta}(\lambda) = A_{11} + A_{14} + A_{32} + A_{34} \neq 0$  не имеет нулей.

**Следствие 2.3.2.** Если  $A_{24} = 0, A_{32} + A_{14} = 0, A_{31} = 0, A_{12} + A_{14} + A_{32} + A_{34} = 0$ , то  $\widehat{\Delta}(\lambda) \equiv 0$ .

В монографии [7] лемма 2.3.5 доказана только для случая  $\hat{q}(x) \equiv 0$ . В нашем случае  $\hat{q}(x) \neq 0$ , но тем не менее для характеристического определителя  $\widehat{\Delta}(\lambda)$  справедливо представление Марченко В.А. Согласно монографии [7] краевые условия (2.3.2) называются вырожденными, если  $A_{24} = 0, A_{32} + A_{14} = 0, A_{31} = 0$ , в противном случае краевые условия (2.3.2) считаем невырожденными.

Теперь вычислим характеристический определитель  $\Delta(\lambda)$ , когда потенциал  $q(x)$  не обязательно симметричный относительно  $x = \frac{1}{2}$ . Для этого, используя лемму 2.3.2, сначала вычислим

$$U_1(c) = \left\{ \begin{array}{l} c(x, \lambda) = \hat{c}(x, \lambda) + r(x, \lambda), \\ \text{где } r(x, \lambda) = \int_{1/2}^x \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(x, \lambda) & \hat{s}(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) c(t, \lambda) dt \end{array} \right\} = U_1(\hat{c} + r) = \\ = U_1(\hat{c}) + U_1(r).$$

Нам также понадобится следующая функция

$$p(x, \lambda) = \int_{1/2}^x \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(x, \lambda) & \hat{s}(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) s(t, \lambda) dt$$

Тогда также вычисляются значения

$$U_1(s) = U_1(\hat{s}) + U_1(p)$$

$$U_2(c) = U_2(\hat{c}) + U_2(r)$$

$$U_2(s) = U_2(\hat{s}) + U_2(p)$$

Отсюда вытекает

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(\hat{c}) + U_1(r) & U_1(\hat{s}) + U_1(p) \\ U_2(\hat{c}) + U_2(r) & U_2(\hat{s}) + U_2(p) \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} U_1(\hat{c}) & U_1(\hat{s}) \\ U_2(\hat{c}) & U_2(\hat{s}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(r) & U_1(\hat{s}) \\ U_2(r) & U_2(\hat{s}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(\hat{c}) & U_1(p) \\ U_2(\hat{c}) & U_2(p) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(r) & U_1(p) \\ U_2(r) & U_2(p) \end{vmatrix} = \\ = \hat{\Delta}(\lambda) + \begin{vmatrix} U_1(r) & U_1(\hat{s}) \\ U_2(r) & U_2(\hat{s}) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(\hat{c}) & U_1(p) \\ U_2(\hat{c}) & U_2(p) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} U_1(r) & U_1(p) \\ U_2(r) & U_2(p) \end{vmatrix}.$$

Отдельно вычислим

$$\begin{vmatrix} U_1(r) & U_1(\hat{s}) \\ U_2(r) & U_2(\hat{s}) \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} \int_{1/2}^1 \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ a_{13}\hat{c}(1, \lambda) + a_{14}\hat{c}'(1, \lambda) & a_{13}\hat{s}(1, \lambda) + a_{14}\hat{s}'(1, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) c(t, \lambda) dt & U_1(\hat{s}) \\ \int_{1/2}^1 \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ a_{23}\hat{c}(1, \lambda) + a_{24}\hat{c}'(1, \lambda) & a_{23}\hat{s}(1, \lambda) + a_{24}\hat{s}'(1, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) c(t, \lambda) dt & U_2(\hat{s}) \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{1/2}^1 Q(t)c(t, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ U_{11}(\hat{c}) & U_{11}(\hat{s}) \\ \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ U_{21}(\hat{c}) & U_{21}(\hat{s}) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} U_1(\hat{s}) \\ U_2(\hat{s}) \end{vmatrix} dt = \\
&= \int_{1/2}^1 Q(t)c(t, \lambda)\hat{c}(t, \lambda) \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{s}) & U_1(\hat{s}) \\ U_{21}(\hat{s}) & U_2(\hat{s}) \end{vmatrix} dt \\
&\quad - \int_{1/2}^1 Q(t)c(t, \lambda)\hat{s}(t, \lambda) \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{c}) & U_1(\hat{s}) \\ U_{21}(\hat{c}) & U_2(\hat{s}) \end{vmatrix} dt \\
&= \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{s}) & U_1(\hat{s}) \\ U_{21}(\hat{s}) & U_2(\hat{s}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{s}) & U_{10}(\hat{s}) \\ U_{21}(\hat{s}) & U_{20}(\hat{s}) \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} a_{13}\hat{s}(1, \lambda) + a_{14}\hat{s}'(1, \lambda) & a_{11}\hat{s}(0, \lambda) + a_{12}\hat{s}'(0, \lambda) \\ a_{23}\hat{s}(1, \lambda) + a_{24}\hat{s}'(1, \lambda) & a_{21}\hat{s}(0, \lambda) + a_{22}\hat{s}'(0, \lambda) \end{vmatrix} \\
&= A_{13}\hat{s}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) + A_{41}\hat{s}(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) + A_{23}\hat{s}(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) \\
&\quad + A_{42}\hat{s}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) \\
&= A_{13}\hat{s}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) + (A_{41} + A_{23})\hat{s}(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) \\
&\quad + A_{42}\hat{s}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda). \\
&\begin{vmatrix} U_{11}(\hat{c}) & U_1(\hat{s}) \\ U_{21}(\hat{c}) & U_2(\hat{s}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} U_{11}(\hat{c}) & (a_{11} - a_{13})\hat{s}(0, \lambda) + (a_{12} + a_{14})\hat{s}'(0, \lambda) \\ U_{21}(\hat{c}) & (a_{21} - a_{23})\hat{s}(0, \lambda) + (a_{22} + a_{24})\hat{s}'(0, \lambda) \end{vmatrix} = \\
&= \begin{vmatrix} a_{13}\hat{c}(0, \lambda) - a_{14}\hat{c}'(0, \lambda) & (a_{11} - a_{13})\hat{s}(0, \lambda) + (a_{12} + a_{14})\hat{s}'(0, \lambda) \\ a_{23}\hat{c}(0, \lambda) - a_{24}\hat{c}'(0, \lambda) & (a_{21} - a_{23})\hat{s}(0, \lambda) + (a_{22} + a_{24})\hat{s}'(0, \lambda) \end{vmatrix} = \\
&\quad = A_{31}\hat{c}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) + (A_{14} + A_{43})\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) + \\
&\quad + (A_{32} + A_{34})\hat{c}(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) + A_{24}\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) = \\
&\quad = (A_{32} + A_{34}) + A_{31}\hat{c}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) + (A_{14} + A_{43})\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) + \\
&\quad A_{24}\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda).
\end{aligned}$$

Характеристический определитель, соответствующий потенциалу  $q(x)$  зададим по формуле

$$\Delta_q(\lambda) = \det\{\|U_j(c(\cdot, \lambda)) \ U_j(s(\cdot, \lambda)), \quad j = 1, 2\|\}$$

$$\text{Пусть } r(x, \lambda) = \int_{0,5}^x \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(x, \lambda) & \hat{s}(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t)c(t, \lambda) dt$$

$$p(x, \lambda) = \int_{0,5}^x \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(x, \lambda) & \hat{s}(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t)s(t, \lambda) dt$$

Сформулируем по аналогии с Марченко В.А. [7] утверждение в случае симметричного потенциала  $\hat{q}(x)$ .

**Лемма 2.3.6.** Справедливо представление характеристического определителя в случае симметричного потенциала

$$\Delta_{\hat{q}}(\lambda) = A_{12} + A_{34} + A_{14} + A_{32} + 2A_{31}\hat{c}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) + \\ + 2(A_{14} + A_{32})\hat{s}(0, \lambda)\hat{c}'(0, \lambda) + 2A_{24}\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda)$$

Доказательство леммы 2.3.6 вытекает из доказательства леммы 2.3.5.

Теперь запишем представление характеристического определителя в случае произвольного потенциала.

**Лемма 2.3.7.** Справедливо представление

$$\begin{aligned} \Delta_q(\lambda) = & \Delta_{\hat{q}}(\lambda) + \Delta_{\hat{q}}(\lambda) \int_{0.5}^1 dt \int_{0.5}^1 dz Q(t)Q(z) c(z, \lambda) s(t, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix} \\ & + \int_{0.5}^1 Q(t)s(t, \lambda) \{A_{13}\hat{c}(t, \lambda)\hat{s}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) \\ & \quad + (A_{23}+A_{41})\hat{c}(t, \lambda)\hat{s}(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) + A_{42}\hat{c}(t, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) \\ & \quad + (A_{23}+A_{43})\hat{s}(t, \lambda) + A_{13}\hat{s}(t, \lambda)\hat{c}(0, \lambda)\hat{s}(0, \lambda) \\ & \quad + (A_{23}+A_{41})\hat{s}(t, \lambda)\hat{s}(0, \lambda)\hat{c}'(0, \lambda) + A_{42}\hat{s}(t, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda)\hat{c}'(0, \lambda)\} dt \\ & + \int_{0.5}^1 Q(t)c(t, \lambda) \{A_{31}\hat{c}(t, \lambda)\hat{s}(0, \lambda)\hat{c}(0, \lambda) \\ & \quad + (A_{32}+A_{14})\hat{c}(t, \lambda)\hat{s}(0, \lambda)\hat{c}'(0, \lambda) + A_{24}\hat{c}(t, \lambda)\hat{c}'(0, \lambda)\hat{s}'(0, \lambda) \\ & \quad + (A_{14}+A_{34})\hat{c}(t, \lambda) + A_{31}\hat{s}(t, \lambda)\hat{c}(0, \lambda)\hat{c}(0, \lambda) \\ & \quad + (A_{32}+A_{14})\hat{s}(t, \lambda)\hat{c}(0, \lambda)\hat{c}'(0, \lambda) + A_{24}\hat{s}(t, \lambda)\hat{c}'(0, \lambda)\hat{c}'(0, \lambda)\} dt \end{aligned}$$

Доказательство леммы 2.3.7 аналогично доказательству леммы 2.3.5.

## 2.4 Формулировка и доказательство полноты системы собственных и присоединенных функций вырожденной краевой задачи Штурма – Лиувилля

Согласно Марченко В.А. [7] матрица  $A$  задает невырожденные граничные условия, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

- $A_{24} \neq 0$ ;
- $A_{24} = 0, A_{14} + A_{32} \neq 0$ ;
- $A_{24} = 0, A_{14} + A_{32} = 0, A_{31} \neq 0$ .

и система собственных и присоединенных функций задачи Штурма-Лиувилля в этом случае представляет полную систему в пространстве  $L_2(0, 1)$ , которая сформулирована в пункте 2.1 настоящей диссертации в виде теоремы 2.1.1.

В данном пункте изучается полнота системы собственных присоединенных функций вырожденной краевой задачи Штурма – Лиувилля.

Пусть матрица  $A$  задает вырожденные граничные условия, то есть считаем, что

$$A_{24} = 0, \quad A_{14} + A_{32} = 0, \quad A_{31} = 0.$$

Так как  $A_{13} = 0$ , то найдется число  $k_1$  такое, что  $a_{13} = k_1 a_{11}$  и  $a_{23} = k_1 a_{21}$ . Точно также из  $A_{24} = 0$  следует существование числа  $k_2$  такого, что  $a_{14} = k_2 a_{12}$  и  $a_{24} = k_2 a_{22}$ . Тогда матрица  $A$  примет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & k_1 a_{11} & k_2 a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & k_1 a_{21} & k_2 a_{22} \end{pmatrix}.$$

Теперь из условия  $A_{14} + A_{32} = 0$  следует равенство

$$k_2 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + k_1 \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда  $(k_1 + k_2)A_{12} = 0$ . При  $A_{12} \neq 0$  имеем  $k_1 = -k_2 = \theta$ .

Поскольку  $A_{34} = k_1 k_2 A_{12} = -\theta^2 A_{12}$ , то минор  $A_{12} \neq 0$ , иначе  $\text{rank } A < 2$ .

Тогда из леммы 2.3.7 вытекает представление характеристического определителя

$$\begin{aligned} \Delta_q(\lambda) &= (A_{12} + A_{34}) \\ &\left( 1 + \int_{0.5}^1 dt \int_{0.5}^1 dz Q(t)Q(z)c(z, \lambda)s(t, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix} \right) \\ &\quad + \int_{0.5}^1 Q(t)s(t, \lambda)\{(A_{14}-A_{34})\hat{s}(t, \lambda)\}dt \\ &\quad + \int_{0.5}^1 Q(t)c(t, \lambda)\{(A_{14}+A_{34})\hat{c}(t, \lambda)\}dt. \end{aligned}$$

Так как  $\text{rank } A = 2$ , то  $A_{12} \neq 0$ .

Отсюда при  $A_{12} \neq 0$  из последнего соотношения получим

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_q(\lambda)}{A_{12}} &= (1 - \theta^2) \\ &\left( 1 + \int_{0.5}^1 dt \int_{0.5}^1 dz Q(t)Q(z)c(z, \lambda)s(t, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix} \right) \\ &\quad - \theta(1 + \theta) \int_{0.5}^1 Q(t)s(t, \lambda)\hat{s}(t, \lambda)dt \\ &\quad - \theta(1 - \theta) \int_{0.5}^1 Q(t)c(t, \lambda)\hat{c}(t, \lambda)dt \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

при некотором  $\theta$ . В данном представлении встречаются интегралы, которые надо преобразовать в удобном виде для дальнейших исследований.

Преобразуем двойной интеграл следующим образом

$$\begin{aligned} &\int_{0.5}^1 dt \int_{0.5}^1 dz Q(t)Q(z)c(z, \lambda)s(t, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix} = \\ &\int_{0.5}^1 dt \int_{0.5}^t dz Q(t)Q(z)c(z, \lambda)s(t, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix} + \\ &\int_{0.5}^1 dt \int_t^1 dz Q(t)Q(z)c(z, \lambda)s(t, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix} = \\ &\int_{0.5}^1 dt \int_{0.5}^t dz Q(t)Q(z)c(z, \lambda)s(t, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix} + \\ &\int_{0.5}^1 dz \int_{0.5}^z dt Q(t)Q(z)c(z, \lambda)s(t, \lambda) \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix} = \\ &\int_{0.5}^1 dt \int_{0.5}^t dz Q(t)Q(z) \begin{vmatrix} c(z, \lambda) & s(z, \lambda) \\ c(t, \lambda) & s(t, \lambda) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

Используя леммы 2.3.2 и 2.3.3, преобразуем интегралы

$$\int_{0.5}^1 Q(t)s(t, \lambda)\hat{s}(t, \lambda)dt = \int_{0.5}^1 Q(t)\hat{s}(t, \lambda)\hat{s}(t, \lambda)dt +$$

$$\int_{0.5}^1 Q(t) dt \int_{0.5}^t d\xi \begin{vmatrix} \hat{c}(\xi, \lambda) & \hat{s}(\xi, \lambda) \\ \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \end{vmatrix} Q(\xi) \hat{s}(t, \lambda) s(\xi, \lambda) \quad (2.4.3),$$

$$\int_{0.5}^1 Q(t) c(t, \lambda) \hat{c}(t, \lambda) dt = \int_{0.5}^1 Q(t) \hat{c}(t, \lambda) \hat{c}(t, \lambda) dt + \int_{0.5}^1 Q(t) dt \int_{0.5}^t d\xi \begin{vmatrix} \hat{c}(\xi, \lambda) & \hat{s}(\xi, \lambda) \\ \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \end{vmatrix} Q(\xi) \hat{c}(t, \lambda) c(\xi, \lambda) \quad (2.4.4).$$

Для дальнейших целей удобно ввести обозначение

$$h(t, z) = \begin{vmatrix} c(z, \lambda) & s(z, \lambda) \\ c(t, \lambda) & s(t, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Функция  $h(t, z)$ , зависящая от  $t$ , является решением задачи Коши

$$\begin{aligned} -h''(t, z) + q(t)h(t, z) &= \lambda h(t, z), \quad 0.5 < t < 1 \\ h(z, z) &= 0, \quad h'_t(z, z) = 1. \end{aligned}$$

Здесь  $z$  играет роль параметра.

Легко видеть, что  $h(t, z)$  является решением интегрального уравнения

$$h(t, z) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t - z)}{\sqrt{\lambda}} + \int_z^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t - \tau)}{\sqrt{\lambda}} q(\tau) h(\tau, z) d\tau.$$

Последнее интегральное уравнение решим методом последовательных приближений. Для этого введем обозначения

$$\begin{aligned} h_0(t, z) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t - z)}{\sqrt{\lambda}}, \\ h_1(t, z) &= \int_z^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t - \tau)}{\sqrt{\lambda}} h_0(\tau, z) q(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{t-z} \frac{1}{2\lambda} (\cos \sqrt{\lambda}(t - 2\tau + z) - \cos \sqrt{\lambda}(t - z)) q(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{t-z} \left( \int_0^{\tau-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t - 2s - z)}{2\sqrt{\lambda}} d2s \right) q(\tau) d\tau = \\ &= \int_0^{t-z} ds \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t - 2s - z)}{\sqrt{\lambda}} \int_s^{t-z} q(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$h_1(t, z) = \int_0^{t-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} q_1(t, s, z) ds,$$

где

$$q_1(t, s, z) = \int_{\frac{t+z-s}{2}}^{\frac{t+z+s}{2}} q(\tau) d\tau.$$

Аналогично, произведем следующую итерацию

$$\begin{aligned} h_2(t, z) &= \int_z^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-\tau)}{\sqrt{\lambda}} h_1(\tau, z) q(\tau) d\tau = \\ &= \int_z^t \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-\tau)}{\sqrt{\lambda}} \left( \int_0^{\tau-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} q_1(\tau, s, z) ds \right) q(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

$$h_2(t, z) = \int_0^{t-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} q_2(t, s, z) ds,$$

где  $q_2(t, s, z)$  выражается через  $q$  и  $q_1$ .

Точно также убеждаемся в справедливости представления

$$h_k(t, z) = \int_0^{t-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} q_k(t, s, z) ds, \quad k \geq 2.$$

Следовательно, решение интегрального уравнения имеет представление

$$h(t, z) = h_0(t, z) + h_1(t, z) + h_2(t, z) + \dots$$

Сходимость данного ряда доказана в монографии [7].

Учитывая интегральные представления итерации  $h_k(t, z)$  при  $k \geq 1$ , решение интегрального уравнения примет вид

$$h(t, z) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-z)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{t-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} H(t, s, z) ds, \quad (2.4.5)$$

где

$$H(t, s, z) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t, s, z).$$

Таким образом решение  $h(t, z)$  записывается через оператор преобразования [7] с ядром  $H(t, s, z)$ .

$$h(t, z) = (I + H) \frac{\sin \sqrt{\lambda} s}{\sqrt{\lambda}}.$$

Также удобно ввести обозначение

$$\hat{h}(z, t) = \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix}.$$

По аналогии, с вышеприведенными рассуждениями, выводим следующее представление



$$\hat{h}(z, t) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}(z - t)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{t-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} \hat{H}(z, s, t) ds, \quad (2.4.6)$$

Здесь  $\hat{H}(z, s, t)$  соответствует симметричному потенциалу  $\hat{q}$ .

Теперь мы готовы преобразовать левую часть соотношения (2.4.2), используя представления (2.4.5) и (2.4.6).

$$\begin{aligned} & \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z)h(t, z)\hat{h}(z, t) = \\ & \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t - z)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{t-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} H(t, s, z) ds \right) \cdot \\ & \cdot \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda}(z - t)}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{z-t} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} \hat{H}(z, s, t) ds \right) = A_1 + A_2 + A_3 + A_4, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= - \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}(t - z)}{\lambda}, \\ A_2 &= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t - z)}{\sqrt{\lambda}} \left( \int_0^{z-t} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} \hat{H}(z, s, t) ds \right), \\ A_3 &= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(z - t)}{\sqrt{\lambda}} \left( \int_0^{t-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}} H(z, s, t) ds \right), \end{aligned}$$

$A_4$

$$= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \left( \int_0^{t-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s_1}{\sqrt{\lambda}} H(z, s_1, t) ds_1 \right) \left( \int_0^{z-t} \frac{\sin \sqrt{\lambda}s_2}{\sqrt{\lambda}} \hat{H}(z, s_2, t) ds_2 \right).$$

Отдельно преобразуем выражение  $A_1$  следующим образом.

$$\begin{aligned} A_1 &= - \int_{0,5}^1 dt \int_0^{t-0,5} dz Q(t)Q(t - z) \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}z}{\lambda} = \\ &= - \int_{0,5}^1 \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}z}{\lambda} dz \int_{z-0,5}^1 Q(t)Q(t - z) dt \\ &= \int_0^{0,5} \frac{\sin^2 \sqrt{\lambda}z}{\lambda} \left( - \int_z^1 Q(t)Q(t - z - 0,5) dt \right) dz = \\ &= \int_0^{0,5} \left( - \int_z^1 Q(t)Q(t - z - 0,5) dt \right) dz \int_0^z \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}} d\xi = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{0.5} \frac{\sin 2\sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}} M_1(\xi) d\xi$$

здесь

$$M_1(\xi) = - \int_{\xi}^{0.5} dz \int_z^1 Q(t)Q(t-z-0.5)dt.$$

Аналогично преобразуется  $A_2$ :

$$\begin{aligned} A_2 &= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{z-t} ds \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-z) \sin \sqrt{\lambda}s}{\lambda} \hat{H}(z,s,t) = \\ &= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{z-t} ds \frac{1}{2\lambda} (\cos \sqrt{\lambda}(t-z-s) \\ &\quad - \cos \sqrt{\lambda}(t-z+s)) \hat{H}(z,s,t) = \\ &= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{z-t} ds \left( \int_{-s}^s \frac{\sin \sqrt{\lambda}(t-z-\xi)}{2\sqrt{\lambda}} d\xi \right) \hat{H}(z,s,t) = \\ &= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{t-z} ds \hat{H}(z,-s,t) \int_{t-z-s}^{t-z+s} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\xi}{2\sqrt{\lambda}} d\xi = \\ &= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{2(t-z)} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}} d\xi \int_{|t-z-s|}^{t-z} \hat{H}(z,-s,t) ds = \\ &= \int_{0,5}^1 dt \int_0^{2t-1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}} d\xi \int_{0,5}^{t-\frac{1}{2}\xi} dz Q(t)Q(z) \int_{|t-z-s|}^{t-z} \hat{H}(z,-s,t) ds = \\ &= \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda}\xi}{\sqrt{\lambda}} M_2(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

где

$$M_2(\xi) = \int_{\frac{\xi+1}{2}}^1 Q(t)dt \int_{0,5}^{t-\frac{1}{2}\xi} Q(z)dz \int_{|t-z-s|}^{t-z} \hat{H}(z,-s,t) ds.$$

Соответственно для  $A_3$  получается следующее соотношение

$$A_3 = \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{t-z} ds \frac{\sin \sqrt{\lambda}(z-t) \sin \sqrt{\lambda}s}{\lambda} H(z,s,t) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{t-z} ds \frac{1}{2\lambda} (\cos \sqrt{\lambda}(z-t-s) \\
&\quad - \cos \sqrt{\lambda}(z-t+s)) H(z, s, t) = \\
&= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{t-z} ds \left( \int_{-s}^s \frac{\sin \sqrt{\lambda}(z-t-\xi)}{2\sqrt{\lambda}} d\xi \right) H(z, s, t) = \\
&= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{t-z} ds H(z, -s, t) \int_{z-t-s}^{z-t+s} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{2\sqrt{\lambda}} d\xi = \\
&= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{2(z-t)} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{\sqrt{\lambda}} d\xi \int_{|z-t-s|}^{z-t} H(z, -s, t) ds = \\
&= \int_{0,5}^1 dt \int_0^{2t-1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{\sqrt{\lambda}} d\xi \int_{0,5}^{z-\frac{1}{2}\xi} dz Q(t)Q(z) \int_{|z-t-s|}^{z-t} H(z, -s, t) ds = \\
&= \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{\sqrt{\lambda}} M_3(\xi) d\xi, \\
M_3(\xi) &= \int_{\frac{\xi+1}{2}}^1 Q(z) dz \int_{0,5}^{z-\frac{1}{2}\xi} Q(t) dt \int_{|z-t-s|}^{z-t} H(z, -s, t) ds.
\end{aligned}$$

Остается преобразовать выражение  $A_4$ .

$$\begin{aligned}
A_4 &= \\
&= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{t-z} H(z, s_1, t) ds_1 \int_0^{z-t} \hat{H}(z, s_2, t) ds_2 \int_{s_1-s_2}^{s_1+s_2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{2\sqrt{\lambda}} d\xi = \\
&= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{t-z} H(z, s_1, t) ds_1 \int_0^{s_1+t-z} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{2\sqrt{\lambda}} M_{43}(t, z, s_1, \xi) d\xi = \\
&= \int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \int_0^{2(t-z)} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{2\sqrt{\lambda}} M_{42}(t, z, \xi) d\xi = \\
&= \int_{0,5}^1 dt \int_0^{2t-1} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{2\sqrt{\lambda}} M_{41}(t, \xi) d\xi = \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{2\sqrt{\lambda}} M_4(\xi) d\xi.
\end{aligned}$$

Здесь  $M_{43}$ ,  $M_{42}$ ,  $M_{41}$ ,  $M_4(\xi)$  некоторые функции, не зависящие от  $\lambda$ .

Таким образом, окончательно имеем

$$\int_{0,5}^1 dt \int_{0,5}^t dz Q(t)Q(z) \begin{vmatrix} c(z, \lambda) & s(z, \lambda) \\ c(t, \lambda) & s(t, \lambda) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}(z, \lambda) & \hat{s}(z, \lambda) \end{vmatrix} =$$

$$= \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{\sqrt{\lambda}} M_0(\xi) d\xi, \quad (2.4.7)$$

где  $M_0(\xi)$  некоторая функция, не зависящая от  $\lambda$ .

Теперь аналогично преобразуем правую часть соотношения (2.4.3).

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^1 Q(t) dt \int_{0.5}^t d\xi \begin{vmatrix} \hat{c}(\xi, \lambda) & \hat{s}(\xi, \lambda) \\ \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \end{vmatrix} Q(\xi) \hat{s}(t, \lambda) s(\xi, \lambda) = \\ = \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{\sqrt{\lambda}} N_0(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

где  $N_0(\xi)$  некоторая функция, не зависящая от  $\lambda$ . Наконец правая часть (2.4.4) переписывается в виде

$$\begin{aligned} \int_{0.5}^1 Q(t) dt \int_{0.5}^t d\xi \begin{vmatrix} \hat{c}(\xi, \lambda) & \hat{s}(\xi, \lambda) \\ \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \end{vmatrix} Q(\xi) \hat{c}(t, \lambda) c(\xi, \lambda) = \\ = \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{\sqrt{\lambda}} P_0(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

где  $P_0(\xi)$  некоторая функция, не зависящая от  $\lambda$ .

Таким образом, из соотношений (2.4.1), (2.4.7), (2.4.8), (2.4.9) вытекает следующая теорема 2.4.1.

**Теорема 2.4.1.** Пусть матрица  $A$  задает вырожденные граничные условия. Тогда собственные значения задачи (2.1.1) – (2.1.2) собственные значения совпадают с нулями характеристического определителя  $\Delta_q(\lambda)$ , который представим в виде

$$\Delta_q(\lambda) = A_{12}(1 - \theta^2) + \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{\sqrt{\lambda}} V(\xi) d\xi, \quad (2.4.10)$$

где  $V(\xi)$  некоторая функция, не зависящая от  $\lambda$ .

Замечание 2.4.1. Правая часть соотношения (2.4.10) может быть представлена в экспоненциальном виде

$$\Delta_q(\lambda) = A_{12}(1 - \theta^2) + \int_0^1 \frac{e^{i\sqrt{\lambda}\xi}}{2i\sqrt{\lambda}} V(\xi) d\xi - \int_{-1}^0 \frac{e^{i\sqrt{\lambda}\xi}}{2i\sqrt{\lambda}} V(-\xi) d\xi.$$

Подобные экспоненциальные функции детально исследовались в работе [36].

Из результатов работы [36] и с учетом теоремы 2.4.1 вытекает основное утверждение о полноте системы собственных и присоединенных функций вырожденной краевой задачи Штурма-Лиувилля.

В случае вырожденных граничных условий надо исследовать систему корневых функций на полноту в пространстве  $L_2(0, 1)$ . Однако, в исследуемом случае система корневых функций может оказаться не полной в пространстве  $L_2(0, 1)$ . К примеру, когда потенциал  $q(x)$  симметричен относительно  $\frac{1}{2}$ . Поэтому вместо пространства  $L_2(0, 1)$  полноту систем собственных и присоединенных функций вырожденной краевой задачи Штурма – Лиувилля

исследуют в пространстве  $L_2\left(\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r\right)$ , где  $r < \frac{1}{2}$ . Нахождение числа  $r$  представляет основную трудность.

По аналогии с Марченко В.А. [7] введем решения однородного уравнения

$$-y^{(2)} + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < 1$$

по формулам

$$\omega_1(x, \lambda) = \begin{vmatrix} c(x, \lambda) & s(x, \lambda) \\ U_2(c(\cdot, \lambda)) & U_2(s(\cdot, \lambda)) \end{vmatrix}$$

$$\omega_2(x, \lambda) = \begin{vmatrix} U_1(c(\cdot, \lambda)) & U_1(s(\cdot, \lambda)) \\ c(x, \lambda) & s(x, \lambda) \end{vmatrix}$$

Полезны также следующие представления

$$\begin{aligned} \omega_1(x, \lambda) &= \begin{vmatrix} c(x, \lambda) & s(x, \lambda) \\ U_2(\hat{c}(\cdot, \lambda)) & U_2(\hat{s}(\cdot, \lambda)) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c(x, \lambda) & s(x, \lambda) \\ U_2(r(\cdot, \lambda)) & U_2(p(\cdot, \lambda)) \end{vmatrix} \\ &= \left\{ a_{21} \begin{vmatrix} c(x, \lambda) & s(x, \lambda) \\ (1 + \theta)\hat{c}(0, \lambda) & (1 - \theta)\hat{s}(0, \lambda) \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. + a_{22} \begin{vmatrix} c(x, \lambda) & s(x, \lambda) \\ (1 + \theta)\hat{c}'(0, \lambda) & (1 - \theta)\hat{s}'(0, \lambda) \end{vmatrix} \right\} \\ &\quad + \theta \int_{0,5}^1 \begin{vmatrix} c(t, \lambda) & s(t, \lambda) \\ c(x, \lambda) & s(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) \left\{ a_{21} \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ -\hat{c}(0, \lambda) & \hat{s}(0, \lambda) \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. - a_{22} \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}'(0, \lambda) & -\hat{s}'(0, \lambda) \end{vmatrix} \right\} dt \\ \omega_2(x, \lambda) &= \left\{ a_{11} \begin{vmatrix} (1 + \theta)\hat{c}(0, \lambda) & (1 - \theta)\hat{s}(0, \lambda) \\ c(x, \lambda) & s(x, \lambda) \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. + a_{12} \begin{vmatrix} (1 + \theta)\hat{c}'(0, \lambda) & (1 - \theta)\hat{s}'(0, \lambda) \\ c(x, \lambda) & s(x, \lambda) \end{vmatrix} \right\} \\ &\quad - \theta \int_{0,5}^1 \begin{vmatrix} c(t, \lambda) & s(t, \lambda) \\ c(x, \lambda) & s(x, \lambda) \end{vmatrix} Q(t) \left\{ a_{11} \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ -\hat{c}(0, \lambda) & \hat{s}(0, \lambda) \end{vmatrix} \right. \\ &\quad \left. - a_{12} \begin{vmatrix} \hat{c}(t, \lambda) & \hat{s}(t, \lambda) \\ \hat{c}'(0, \lambda) & -\hat{s}'(0, \lambda) \end{vmatrix} \right\} dt \end{aligned}$$

**Теорема 2.4.2.** Пусть  $r = \max_x \text{supp } Q \leq \frac{1}{2}$  и  $A_{24} = 0$ ,  $A_{14} + A_{32} = 0$ ,  $A_{31} = 0$ .

Система собственных и присоединенных функций двухточечной краевой задачи для уравнения Штурма-Лиувилля полна в пространстве  $L_2\left(\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r\right)$ .

Доказательство основного результата проводится методом Марченко В. А. [7] с привлечением некоторых модификаций, поскольку, в нашем случае характеристический определитель имеет экспоненциальное представление. В работе [36] исследована полнота систем экспонент, порожденная нулями

некоторой целой функции, имеющей интегральное представление. В данном пункте мы используем результаты этой работы [36].

### 3 СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОДНОГО ОПЕРАТОРА С НЕРЕГУЛЯРНЫМИ УСЛОВИЯМИ

#### 3.1 Операторы преобразования, связанные с серединой отрезка

В различных вопросах спектральной теории операторов Штурма-Лиувилля важную роль играют операторы преобразования треугольного вида

$$y(x, \lambda) = (1 + K)\omega(k, \lambda) = \omega(x, \lambda) + \int_0^x k(x, s) \omega(s, \lambda) ds,$$

переводящее решение  $\omega(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x$  уравнения

$$-\omega'' = \lambda\omega \quad (3.1.1)$$

в решение  $y(x, \lambda)$  уравнения

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \quad 0 < x < 1 \quad (3.1.2)$$

В случае, если краевые условия являются не распадающимися (т.е. представляют комбинацию значений решений и ее производных на обоих концах рассматриваемого отрезка) удобно пользоваться операторами преобразования вида

$$y\left(\frac{1}{2} - x, \lambda\right) = \omega\left(\frac{1}{2} - x, \lambda\right) + \int_{-x}^x k(x, s) \omega\left(\frac{1}{2} - x, \lambda\right) ds,$$

где  $\omega\left(\frac{1}{2} - x, \lambda\right)$  произвольное решение уравнения (3.1.1). В дальнейшем везде  $q(x) \in L_2[0,1]$ .

**Утверждение 3.1.1.** [7] Пусть  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  фундаментальная система решений уравнения (3.1.2) с условиями Коши в точке  $x = \frac{b}{2}$

$$y_1\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = y_2'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 1, \quad y_1'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = y_2\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 0.$$

Тогда найдутся функции  $k_{1,2}(x, t)$ ,  $|t| < x$ ,  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$  такие, что

$$y_1\left(\frac{1}{2} \pm x, \lambda\right) = \cos \sqrt{\lambda}(\pm x) + \int_{-x}^x k_{\pm}(x, t) \cos \sqrt{\lambda}(\pm t) dt,$$

$$y_2\left(\frac{1}{2} \pm x, \lambda\right) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pm x)}{\sqrt{\lambda}} + \int_{-x}^x k_{\pm}(x, t) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pm t)}{\sqrt{\lambda}} dt,$$

при  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ . Здесь удобно пере обозначить через  $k_1(x, t) = k_+(x, t)$  и  $k_2(x, t) = k_-(x, t)$ .

**Доказательство.** Запишем интегральное уравнение

$$y_1\left(\frac{1}{2}-x, \lambda\right) = \cos \sqrt{\lambda}(-x) + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q\left(\frac{1}{2}-t\right) y_1\left(\frac{1}{2}-t, \lambda\right) dt, \quad (3.1.3)$$

которое эквивалентно определению решения  $y_1\left(\frac{1}{2}-x, \lambda\right)$  при  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

Действительно, последовательно вычисляя производные получим

$$-y_1'\left(\frac{1}{2}-x, \lambda\right) = \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(-x) + \int_0^x \cos \sqrt{\lambda}(x-t) q\left(\frac{1}{2}-t\right) y_1\left(\frac{1}{2}-t, \lambda\right) dt, \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned} y_1'\left(\frac{1}{2}-x, \lambda\right) &= \\ &= -\lambda \sin \sqrt{\lambda}(-x) + \int_0^x -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda}(x-t) q\left(\frac{1}{2}-t\right) y_1\left(\frac{1}{2}-t, \lambda\right) dt \\ &\quad + q\left(\frac{1}{2}-x\right) y_1\left(\frac{1}{2}-x, \lambda\right). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения видим, что

$$y_1''\left(\frac{1}{2}-x, \lambda\right) = -\lambda y_1\left(\frac{1}{2}-x, \lambda\right) + q\left(\frac{1}{2}-x\right) y_1\left(\frac{1}{2}-x, \lambda\right),$$

то есть удовлетворяет уравнению (3.1.2). Подставляя в формулы (3.1.3), (3.1.4) значение  $x = 0$ , получим  $y_1\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 1$ ,  $y_1'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) = 0$ .

Итак, остается решить уравнение (3.1.3) методом последовательных приближений. Положим

$$\begin{aligned} h_0(x, \lambda) &= \cos \sqrt{\lambda}(-x) \\ h_{k+1}(x, \lambda) &= \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} q\left(\frac{1}{2}-t\right) h_k(t, \lambda) dt, \quad k \geq 0 \end{aligned}$$

Покажем, что  $h_k(x, \lambda)$  имеет вид

$$h_k(x, \lambda) = \int_{-x}^x \cos \sqrt{\lambda}(-s) H_k(x, s) ds, \quad k \geq 1.$$

Действительно, при  $k = 1$  имеем

$$\begin{aligned} h_1(x, \lambda) &= \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x-t)}{\sqrt{\lambda}} \cos \sqrt{\lambda}(-t) q\left(\frac{1}{2}-t\right) dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda}(+x-2t)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \sqrt{\lambda}(-x)}{\sqrt{\lambda}} \right) q\left(\frac{1}{2}-t\right) dt. \quad (3.1.5) \end{aligned}$$

Учтем, что

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda} (+x - 2t)}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \sqrt{\lambda} (-x)}{\sqrt{\lambda}} = \int_{2t-x}^x \cos \sqrt{\lambda} (-s) ds, \quad (3.1.6)$$

тогда из (3.1.5) получим

$$h_1(x, \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^x q \left( \frac{1}{2} - t \right) dt \int_{\frac{x+s}{2}}^x \cos \sqrt{\lambda} (-s) ds = \\ \int_{-x}^x \cos \sqrt{\lambda} (-s) ds \frac{1}{2} \int_0^x q \left( \frac{1}{2} - t \right) dt.$$

Последнее равенство есть следствие применения теоремы Фубини о перестановке порядка интегрирования. Пусть  $k$  – произвольное, тогда

$$h_{k+1}(x, \lambda) = \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x - t)}{\sqrt{\lambda}} q \left( \frac{1}{2} - t \right) dt \int_{-t}^t \cos \sqrt{\lambda} (-s) ds H_k(t, s).$$

Применяя формулу (3.1.6), имеем

$$h_{k+1}(x, \lambda) = \frac{1}{2} \int_0^x dt \int_{-t}^t ds \int_{t+s-x}^{x-t+s} \cos \sqrt{\lambda} (-\tau) d\tau q \left( \frac{1}{2} - t \right) H_k(t, s).$$

Из последнего соотношения, меняя порядок интегрирования, получим требуемое

$$h_{k+1}(x, \lambda) = \int_{-x}^x \cos \sqrt{\lambda} (-\tau) H_{k+1}(x, \tau) d\tau,$$

где

$$H_{k+1}(x, \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x-\tau}{2}} dt \int_{-t}^{\tau-x-t} q \left( \frac{1}{2} - t \right) H_k(t, s) ds + \\ + \frac{1}{2} \int_{\frac{x-\tau}{2}}^x dt \int_{t+\tau-x}^{\tau+x-t} q \left( \frac{1}{2} - t \right) H_k(t, s) ds + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+\tau}{2}} dt \int_{-t}^t q \left( \frac{1}{2} - t \right) H_k(t, s) ds \\ + (3.1.7) \\ + \frac{1}{2} \int_{\frac{x+\tau}{2}}^{\frac{x}{2}} dt \int_{-t}^{\tau+x-t} q \left( \frac{1}{2} - t \right) H_k(t, s) ds, \quad -x < \tau < 0 \\ H_{k+1}(x, \tau) d\tau = \frac{1}{2} \int_{\frac{x+\tau}{2}}^x dt \int_{t+\tau-x}^{\tau+x-t} q \left( \frac{1}{2} - t \right) H_k(t, s) ds +$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+\tau}{2}} dt \int_{\tau+t-x}^t q\left(\frac{1}{2}-t\right) H_k(t,s) ds + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x-\tau}{2}} dt \int_{-t}^t q\left(\frac{1}{2}-t\right) H_k(t,s) ds + \\
& + \frac{1}{2} \int_{\frac{x-\tau}{2}}^{\frac{x}{2}} dt \int_{t+\tau-x}^t q\left(\frac{1}{2}-t\right) H_k(t,s) ds, \quad \text{при } 0 < \tau < x.
\end{aligned}$$

Следовательно, положим

$$k_2(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} H_k(x, t).$$

Сходимость ряда следует из оценок для функции  $H_k(x, t)$ . Действительно, верны равенства если учесть, что  $H_k(x, t) = 0$  при  $x \geq t$ .

$$|H_1(x, \tau)| \leq \frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+\tau}{2}} \left| q\left(\frac{1}{2}-s\right) \right| ds = \sigma\left(\frac{x+\tau}{2}\right), \quad (3.1.9)$$

$$|H_2(x, \tau)| \leq \frac{1}{2} \int_0^x dt \int_{\tau-(x-t)}^{\tau+(x-t)} ds |H_1(t, s)| \left| q\left(\frac{1}{2}-t\right) \right|. \quad (3.1.10)$$

Из формул (3.1.7), (3.1.8) видно, что  $\max(t+s)$  на множестве, где отлично от нуля  $H_2(t, s)$ , равен  $(x+\tau)$ . Следовательно, учитывая неравенство (3.1.9), из (3.1.10) получим

$$|H_2(x, \tau)| \leq \sigma\left(\frac{x+\tau}{2}\right) \frac{1}{2} \int_0^x dt \left| q\left(\frac{1}{2}-t\right) \right| \int_{\tau-(x-t)}^{\tau+(x-t)} \theta(t-|s|) ds,$$

где  $\theta(s) = 1$  при  $s > 0$ ,  $\theta(s) = 0$  при  $s \leq 0$ .

Не трудно видеть, что

$$\int_{\tau-(x-t)}^{\tau+(x-t)} \theta(t-|s|) ds \leq 2(x-t) \leq 2.$$

Поэтому

$$|H_2(x, \tau)| \leq \sigma\left(\frac{x+\tau}{2}\right) \sigma_1(x), \quad (3.1.11)$$

где  $\sigma_1(x) = \int_0^x q\left(\frac{1}{2}-t\right) dt$ .

Теперь оценка  $H_3(x, \tau)$  осуществляется с применением (3.1.11)

$$|H_3(x, \tau)| \leq \sigma\left(\frac{x+\tau}{2}\right) \frac{1}{2} \int_0^x dt \left| q\left(\frac{1}{2}-t\right) \right| \int_{\tau-(x-t)}^{\tau+(x-t)} \theta(t-|s|) \sigma_1(t) ds \leq$$

$$\leq \sigma \left( \frac{x + \tau}{2} \right) \frac{1}{2} \int_0^x b \left| q \left( \frac{1}{2} - t \right) \right| \sigma_1(t) dt = \sigma \left( \frac{x + \tau}{2} \right) \frac{\sigma_1^2(x)}{2!}$$

Точно такие же рассуждения проходят для  $H_{k+1}(x, \tau)$ . Следовательно, для ядра  $k_2(x, t)$  верно неравенство

$$k_2(x, t) \leq \sigma \left( \frac{x + \tau}{2} \right) \exp \sigma_1(x)$$

Отметим, что  $k_2(x, t)$  имеет первые частные производные из  $L_2$ . Последнее замечание следует из равномерной сходимости ряда для  $k_2(x, t)$  и формул (3.1.7), (3.1.8).

Свойства  $k_{1,2}(x, t)$  выписаны в монографии [7. с. 20-21].

При рассмотрении  $y_1 \left( \frac{1}{2} - x, \lambda \right)$  в соотношении (3.1.5) вместо разности синусов появится разность косинусов. Тогда формула (3.1.6) будет иметь те же пределы, только подинтегральный косинус надо заменить на

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda} \left( \frac{1}{2} - s \right)}{\sqrt{\lambda}}.$$

Дальнейшие рассуждения переносятся на этот случай без изменений. А так как представление  $h_k(x, t)$  не зависит от замены косинуса на синус, то формула для  $h_k(x, t)$  будет та же, что и в случае  $y_1 \left( \frac{1}{2} - x, \lambda \right)$ . Следовательно, ядро оператора преобразования  $k_2(x, t)$  также не меняется при переходе от  $y_1 \left( \frac{1}{2} - x, \lambda \right)$  к  $y_2 \left( \frac{1}{2} - x, \lambda \right)$ .

**Замечание 3.1.1.** Заметим, что

$$k_1(x, t) = k_2(-x, -t),$$

где

$$k_1(x, t) = \sum_1^{\infty} M_j(x, t), \quad k_2(x, t) = \sum_1^{\infty} H_j(x, t),$$

то есть во всех формулах для  $H_{k+1}(x, t)$  надо  $(x, t)$  заменить на  $(-x, -t)$ . Выпишем соответствующие формулы

$$M_1(x, t) = H_1(-x, -t) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{-x-t}{2}} q \left( \frac{1}{2} - \tau \right) d\tau = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{x+t}{2}} q \left( \frac{1}{2} + \tau \right) d\tau$$

$$M_{k+1}(x, \tau) = H_{k+1}(-x, -\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{-x} dt \int_{-\tau-x-t}^{-\tau-x-t} q \left( \frac{1}{2} - t \right) H_k(t, s) ds =$$

$$\frac{1}{2} \int_x^0 dt \int_{-\tau+x-t}^{t-\tau+x} q \left( \frac{1}{2} + t \right) H_k(-t, s) ds = \frac{1}{2} \int_0^x dt \int_{\tau-x+t}^{\tau+x-t} q \left( \frac{1}{2} + t \right) H_k(-t, -s) ds =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^x dt \int_{\tau-x+t}^{\tau+x-t} q\left(\frac{1}{2} + t\right) M_k(t, s) ds.$$

$$M_{k+1}(x, -\tau) = \frac{1}{2} \int_0^x dt \int_{\tau-x+t}^{\tau+x-t} q\left(\frac{1}{2} + t\right) M_k(t, -s) ds$$

при  $-x < t < 0$ .

**Замечание 3.1.2.** Ядро  $k_2(x, t)$  зависит от значений  $q(\xi)$ ,  $\xi \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ . В то же время ядро  $k_1(x, t)$  зависит от  $\left\{q(\xi), \xi \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right\}$ .

**Замечание 3.1.3.** Если  $q(x)$  заменить на

$$q(x) + a \text{ при } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right],$$

$$q(x) + c \text{ при } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right],$$

то для решения  $y_1\left(\frac{1}{2} - x, \lambda - a\right)$ ,  $y_2\left(\frac{1}{2} - x, \lambda - a\right)$ ,  $y_1\left(\frac{1}{2} + x, \lambda - c\right)$ ,  $y_2\left(\frac{1}{2} + x, \lambda - c\right)$  ядро оператора преобразования  $k_{1,2}(x, t)$  не меняется.

**Замечание 3.1.4.** Если  $q\left(\frac{1}{2} - x\right) \equiv q\left(\frac{1}{2} + x\right)$ ,  $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ , то  $k_1(x, t) \equiv -k_2(x, t)$ .

В заключении этого пункта вычислим некоторые значения

$$H_1(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x q\left(\frac{1}{2} - t\right) dt, \quad H_1(x, -x) = 0,$$

$$M_1(x, x) = -\frac{1}{2} \int_0^x q\left(\frac{1}{2} + t\right) dt, \quad M_1(x, -x) = 0,$$

$$H_k(x, x) = 0, \quad M_k(x, x) = 0, \quad k \geq 2,$$

$$H_k(x, -x) = 0, \quad M_k(x, -x) = 0, \quad k \geq 2,$$

$$k_1(x, x) + k_2(x, x) = \frac{1}{2} \int_0^x \left( q\left(\frac{1}{2} - t\right) - q\left(\frac{1}{2} + t\right) \right) dt, \quad (3.1.12)$$

$$k_1(x, -x) = 0, \quad k_2(x, -x) = 0. \quad (3.1.13)$$

### 3.2 Формулы среднего значения для решений обыкновенных дифференциальных уравнений

Хорошо известны формулы среднего значения для тригонометрических функций

$$\frac{\cos \sqrt{\lambda} a + \cos \sqrt{\lambda} b}{2} = \cos \sqrt{\lambda} \frac{a+b}{2} - \cos \sqrt{\lambda} \frac{b-a}{2},$$

$$\frac{\sin \sqrt{\lambda} a - \sin \sqrt{\lambda} b}{2} = \sin \sqrt{\lambda} \frac{b-a}{2} - \cos \sqrt{\lambda} \frac{b+a}{2}, \quad (3.2.1)$$

Поскольку  $\omega(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda}x$ ,  $\theta(x, \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}}$  решения дифференциального уравнения  $-y''(x, \lambda) = \lambda y''(x, \lambda)$ , то формулы (3.2.1) справедливы для решения линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, то есть произведение решений есть сумма решений. Оказывается, [37] формулы, аналогичные (3.2.1) верны для решений произвольных уравнений с переменными коэффициентами. Систематическое применение таких формул в вопросах базисности системы корневых функций дифференциальных операторов можно найти в работах В.А. Ильина [37]. Аналогичные формулы среднего значения, но отличные от формул из [37], приведены в работе [33].

В настоящем пункте выписаны формулы среднего значения для решения дифференциального уравнения

$$-y''(x, \lambda) + q(x)y(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda), \quad x \in (0,1), \quad (3.2.2)$$

где  $q(x) \in L_2[0,1]$ .

**Утверждение 3.2.1.** [33]. Пусть  $y(x, \lambda)$  произвольное решение уравнения (3.2.2),  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  – фундаментальная система решения уравнения (3.2.2) с условиями Коши в нуле  $y_1(0, \lambda) = y_2'(0, \lambda) = 1$ ,  $y_1'(0, \lambda) = y_2(0, \lambda) = 0$ . Тогда справедливы соотношения

$$2y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)y_1'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) + \int_{1/2}^1 Q(x)y_1(1-x, \lambda)y(x, \lambda)dx = y'(1) - y'(0),$$

$$2y\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)y_2'\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) + \int_{1/2}^1 Q(x)y_2(1-x, \lambda)y(x, \lambda)dx = y'(1) + y(0),$$

где  $Q(x) = q(x) - q(1-x)$ .

**Доказательство.** Интегрирование по частям дает формулы

$$0 = \int_0^{1/2} \{-y''(x) + q(x)y(x) - \lambda y(x)\}y_k(x)dx =$$

$$= -y'\left(\frac{1}{2}\right)y_k\left(\frac{1}{2}\right) + y'(0)y_k(0) + y\left(\frac{1}{2}\right)y_k'\left(\frac{1}{2}\right) + y(0)y_k'(0) +$$

$$+ \int_{1/2}^1 \{-y_k''(x) + q(x)y_k(x) - \lambda y_k(x)\}y(x)dx, \quad (3.2.3)$$

$$0 = \int_{1/2}^1 \{-y''(x) + q(x)y(x) - \lambda y(x)\}y_k(1-x)dx =$$

$$\begin{aligned}
&= -y'(1)y_k(0) + y'\left(\frac{1}{2}\right)y_k\left(\frac{1}{2}\right) - y(b)y'_k(0) + y\left(\frac{1}{2}\right)y'_k\left(\frac{1}{2}\right) + \\
&+ \int_0^{1/2} \{-y''_k(1-x) + q(x)y_k(1-x) - \lambda y_k(1-x)\}y(x)dx, \quad (3.2.4)
\end{aligned}$$

Учитывая, что  $q(x)y_k(x) = y''_k(x) + \lambda y_k(x)$ , и складывая соотношения (3.2.3), (3.2.4) получим при  $k = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\frac{y'(1) - y'(0)}{2} &= y\left(\frac{1}{2}\right)y'_1\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{1/2}^1 Q(x)y_1(1-x)y(x)dx, \\
\frac{y(1) + y(0)}{2} &= y\left(\frac{1}{2}\right)y'_2\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 Q(x)y_2(1-x)y(x)dx.
\end{aligned}$$

**Замечание 3.2.1.** Вычитая из (3.2.3) соотношение (3.2.4), приходим к другой паре формул среднего значения

$$\frac{y'(1) + y'(0)}{2} = y'\left(\frac{1}{2}\right)y_1\left(\frac{1}{2}\right) + \int_{1/2}^1 Q(x)y_1(1-x)y(x)dx, \quad (3.2.5)$$

$$\frac{y(1) - y(0)}{2} = y'\left(\frac{1}{2}\right)y_2\left(\frac{1}{2}\right) - \int_{1/2}^1 Q(x)y_2(1-x)y(x)dx. \quad (3.2.6)$$

**Замечание 3.2.2.** В случае симметрии коэффициенты  $q(x)$  относительно середины отрезка  $[0,1]$ , то есть  $Q(x) \equiv 0$ , утверждение 3.2.1 совпадает по формулировке с формулой (3.2.1).

**Замечание 3.2.3.** Взяв линейную комбинацию соотношений (3.2.3), (3.2.4) можно получать ту или иную комбинацию значений  $y(x, \lambda)$  и ее производных на концах отрезка  $[0,1]$ .

### 3.3 Об одном операторе, связанном с нерегулярными краевыми условиями

Изучению краевых задач вида

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in (0,1), \quad (3.3.1)$$

$$\sum_{k=0}^1 a_{jk} y^{(k)}(0) + b_{jk} y^{(k)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, \quad (3.3.2)$$

посвящена монография [9]. Дж. Биркгофом [38] выделены краевые условия типа (3.3.2), названные регулярными для которых им доказаны теоремы полноты собственных и присоединенных функций. Недавно [39] выяснено, что операторы, соответствующие регулярным краевым условиям, могут не обладать системой корневых функций со свойством базисности Рисса, хотя обладают свойством базисности Рисса со скобками.

В данном пункте введем оператор  $L$ , порождаемый операцией

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x),$$

и областью определения

$$D(L) = \{y(x) \in W_2^2[0,1]; \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = -y'(1)\}, \quad (3.3.3)$$

Отметим, что краевые условия (3.3.3) будут нерегулярными по Биркгофу. В дальнейшем покажем, что система корневых функций оператора  $L$  не удовлетворяет утверждениям работы [33], то есть нерегулярные краевые условия порождают системы собственных и присоединенных функций, не являющиеся базисами в пространстве  $L_2[0,1]$ . Пока отметим, что оператор  $L$  существенно отличается от операторов с регулярными краевыми условиями по Биркгофу.

**Лемма 3.3.1.** Пусть  $Q(x) = 0$  почти всюду на  $[0,1]$ . Тогда спектр оператора  $L$  составляют всю комплексную плоскость, то есть резольвентное множество – пусто.

**Доказательство.** Пусть  $\lambda$  является собственным значением оператора  $L$ , а  $y(x, \lambda)$  соответствующая функция. Тогда из формул (3.2.5) – (3.2.6) следует, что

$$\begin{cases} y'(\frac{1}{2}, \lambda) \cdot y_1(\frac{1}{2}, \lambda) = 0, \\ y'(\frac{1}{2}, \lambda) \cdot y_2(\frac{1}{2}, \lambda) = 0 \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Поскольку вронскиан решений  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  равен единице, то из системы (3.3.4) следует

$$y'(\frac{1}{2}, \lambda) = 0 \quad (3.3.5)$$

Следовательно, когда  $Q(x) \equiv 0$ , то собственная функция необходимо удовлетворяет условию (3.3.5). Поскольку собственная функция  $y(x, \lambda)$  отлична от тождественного нуля, то  $y(\frac{1}{2}, \lambda) \neq 0$ . Можно считать, что  $y(\frac{1}{2}, \lambda) = 1$ , так как собственная функция определяется с точностью до множителя.

Пусть  $\lambda$  – произвольно и  $y(x, \lambda)$  решение уравнения (3.2.2) с условиями (3.2.5) – (3.2.6). Из теории дифференциальных уравнений известно, что для  $y(x, \lambda)$  можно записать интегральное уравнение

$$y(x, \lambda) = \cos \sqrt{\lambda} \left( \frac{1}{2} - x \right) + \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} (x - t)}{\sqrt{\lambda}} q(x) y(t, \lambda) dt.$$

Методом последовательных приближений получаем

$$h_k(x, \lambda) = h_k(1 - x, \lambda), \quad \forall k, \forall x.$$

Поэтому верно равенство

$$y(x, \lambda) = y(1 - x, \lambda) \quad x \in [0, 1]$$

Отсюда при  $x = 0$  следует выполнение условий (3.3.3), то есть  $y(x, \lambda)$  является собственной функцией оператора  $L$  при произвольном  $\lambda$ .

**Замечание 3.3.1.** Для регулярных краевых условий спектр соответствующего оператора – всегда счетное множество, а для оператора  $L$  с симметрическим коэффициентом  $q(x)$  относительно  $\frac{1}{2}$  спектр представляют множество всех комплексных чисел. Больше того в следующем пункте увидим, что при несимметрическом  $q(x)$  спектр счѐтен, а для регулярных операторов главный член асимптотики спектра не зависит от свойств  $q(x)$ .

**Замечание 3.3.2.** В.А. Марченко делит краевые условия на вырожденные и невырожденные. Оператор  $L$  соответствует вырожденным по В.А. Марченко краевым условиям, которые мало исследованы.

### 3.4 Интегральное представление характеристического определителя оператора $L$

Рассмотрим задачу на собственные значения

$$Ly = \lambda y,$$

где  $L$  определен в предыдущем пункте.

**Теорема 3.4.1.** Пусть  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  произвольная система решений уравнения (3.3.1) и обозначим через  $\Delta(\lambda)$  функцию

$$\Delta(\lambda) = \int_{\frac{1}{2}}^1 Q(x) (y_1(1 - x, \lambda) y_2(x, \lambda) - y_2(1 - x, \lambda) y_1(x, \lambda)) dx \quad (3.4.1)$$

Тогда спектр оператора  $L$  совпадает с множеством нулей функции  $\Delta(\lambda)$ , причем совпадение с учетом кратностей.

**Доказательство.** В качестве  $y_1(x, \lambda)$  и  $y_2(x, \lambda)$  возьмем те, которые участвуют в формулах среднего значения (3.2.5), (3.2.6). Из указанных формул следует, что каждая собственная функция  $y(x, \lambda)$  оператора  $L$  необходимо удовлетворяет условиям

$$2y' \left( \frac{1}{2}, \lambda \right) y_1 \left( \frac{1}{2}, \lambda \right) - \int_{\frac{1}{2}}^1 Q(x) y_1(1 - x, \lambda) y(x, \lambda) dx = 0,$$

$$2y' \left( \frac{1}{2}, \lambda \right) y_2 \left( \frac{1}{2}, \lambda \right) - \int_{1/2}^1 Q(x) y_2(1-x, \lambda) y(x, \lambda) dx = 0. \quad (3.4.1)$$

Поскольку

$$y(x, \lambda) = y \left( \frac{1}{2}, \lambda \right) V_1(x) + y' \left( \frac{1}{2}, \lambda \right) V_2(x),$$

где  $V_k(x)$  решение уравнения (3.3.1) с условиями

$$V_1 \left( \frac{1}{2} \right) = V_2' \left( \frac{1}{2} \right) \quad V_1' \left( \frac{1}{2} \right) = V_2 \left( \frac{1}{2} \right) = 0,$$

то матрично-векторная запись системы (3.4.1) примет вид

$$\begin{bmatrix} 2y_1 \left( \frac{1}{2} \right) - \int_{1/2}^1 Q(x) y_1(1-x) V_2(x) dx & \int_{1/2}^1 Q(x) y_1(1-x) V_1(x) dx \\ 2y_1 \left( \frac{1}{2} \right) - \int_{1/2}^1 Q(x) y_2(1-x) V_2(x) dx & \int_{1/2}^1 Q(x) y_2(1-x) V_1(x) dx \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \left( \frac{1}{2} \right) \\ -y \left( \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.4.2)$$

Однородная система линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда

$$\Delta(\lambda) = 0,$$

где  $2\Delta(\lambda)$  определитель системы (3.4.2). Найдем интегральное представление характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$ , связанного с системой (3.4.2).

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \int_{1/2}^1 Q(x) V_1(x) \begin{vmatrix} y_1 \left( \frac{1}{2} \right) & y_1(1-x) \\ y_2 \left( \frac{1}{2} \right) & y_2(1-x) \end{vmatrix} dx - \\ & - \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 \int_{1/2}^1 V_2(x_1) V_1(x_2) Q(x_1) Q(x_2) \begin{vmatrix} y_1(1-x_1) & y_1(1-x_2) \\ y_2(1-x_1) & y_2(1-x_2) \end{vmatrix} dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Нетрудно понять, что

$$\begin{aligned} V_1(x) = & - \begin{vmatrix} y_1' \left( \frac{1}{2} \right) & y_1(1-x) \\ y_2' \left( \frac{1}{2} \right) & y_2(1-x) \end{vmatrix} \\ & - \int_{b/2}^x Q(\tau) V_1(\tau) \begin{vmatrix} y_1(1-\tau) & y_1(1-x) \\ y_2(1-\tau) & y_2(1-x) \end{vmatrix} d\tau \end{aligned} \quad (3.4.4)$$



$$V_2(x) = - \begin{vmatrix} y_1\left(\frac{1}{2}\right) & y_1(1-x) \\ y_2\left(\frac{1}{2}\right) & y_2(1-x) \end{vmatrix} - \int_{1/2}^x Q(\tau) V_2(\tau) \begin{vmatrix} u_1(1-\tau) & u_1(1-x) \\ u_2(1-\tau) & u_2(1-x) \end{vmatrix} d\tau \quad (3.4.5)$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что  $V_1(x)$ ,  $V_2(x)$  удовлетворяют уравнению (3.3.1) и начальным условиям в точке  $1/2$ . Теперь преобразуем (3.4.3), учитывая (3.4.4), (3.4.5).

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \int_{1/2}^1 Q(x) V_1(x) \begin{vmatrix} y_1\left(\frac{1}{2}\right) & y_1(1-x) \\ y_2\left(\frac{1}{2}\right) & y_2(1-x) \end{vmatrix} dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 dx_1 \int_{1/2}^1 dx_2 Q(x_1) V_1(x_1) Q(x_2) V_2(x_2) \begin{vmatrix} y_1(1-x_1) & y_1(1-x_2) \\ y_2(1-x_1) & y_2(1-x_2) \end{vmatrix} = \\ &= \int_{1/2}^1 Q(x) V_1(x) \begin{vmatrix} y_1\left(\frac{1}{2}\right) & y_1(1-x) \\ y_2\left(\frac{1}{2}\right) & y_2(1-x) \end{vmatrix} dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 dx_1 \int_{1/2}^1 Q(x_1) V_1(x_1) Q(x_2) V_2(x_2) \begin{vmatrix} y_1(1-x_1) & y_2(1-x_2) \\ y_2(1-x_1) & y_2(1-x_2) \end{vmatrix} dx_2 - \\ &- \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 dx_2 \int_{1/2}^1 Q(x_1) V_1(x_1) Q(x_2) V_2(x_2) \begin{vmatrix} y_1(1-x_1) & y_2(1-x_2) \\ y_2(1-x_1) & y_2(1-x_2) \end{vmatrix} dx_1 = \\ &= \int_{1/2}^1 Q(x) V_1(x) \begin{vmatrix} y_1\left(\frac{1}{2}\right) & y_1(1-x) \\ y_2\left(\frac{1}{2}\right) & y_2(1-x) \end{vmatrix} dx - \\ &- \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 Q(x_1) V_1(x_1) \left( V_2(x_1) + \begin{vmatrix} y_1\left(\frac{1}{2}\right) & y_1(1-x_1) \\ y_2\left(\frac{1}{2}\right) & y_2(1-x_1) \end{vmatrix} \right) dx_1 - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2} \int_{1/2}^1 Q(x_2) V_2(x_2) \left( - \begin{vmatrix} y_1' \left( \frac{1}{2} \right) & y_1(1-x_2) \\ y_2' \left( \frac{1}{2} \right) & y_2(1-x_2) \end{vmatrix} - V_1(x_2) \right) dx_2 = \\
& = \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 dx_1 Q(x) \begin{vmatrix} y_1 \left( \frac{1}{2} \right) V_1(x) + y_1' \left( \frac{1}{2} \right) V_2(x) & y_1(1-x) \\ y_2 \left( \frac{1}{2} \right) V_1(x) + y_2' \left( \frac{1}{2} \right) V_2(x) & y_2(1-x) \end{vmatrix} = \\
& = \frac{1}{2} \int_{1/2}^1 dx Q(x) \begin{vmatrix} y_1(x) & y_1(1-x) \\ y_2(x) & y_2(1-x) \end{vmatrix}.
\end{aligned}$$

**Замечание 3.4.1.** Поскольку сопряженный оператор  $L^*$  к оператору  $L$  определяется так:

$$\begin{aligned}
L^*y &= -y''(x) + \overline{q(x)}y(x), \\
y(0) &= -y(1), \quad y'(x) = y'(1).
\end{aligned}$$

Спектр  $L^*$  также определяется с помощью функции  $\Delta(\lambda)$ , введенной в теореме 3.4.1.

Представление (3.4.1) содержит фундаментальную систему решений  $y_1(x, \lambda)$  и  $y_2(x, \lambda)$ , которые неявно зависят от  $q(x)$  и  $\lambda$ . В следующей теореме дана явная зависимость характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$  от спектрального параметра.

**Теорема 3.4.2.** Для характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$  справедливо интегральное представление

$$\Delta(\lambda) = \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} D(x) dx. \quad (3.4.6)$$

Формулы для  $D(x)$  приведены ниже.

**Доказательство.** Согласно утверждению 3.1.1.

$$\begin{aligned}
V_1 \left( \frac{1}{2} + x, \lambda \right) &= \cos \sqrt{\lambda} x + \int_{-x}^x k_1(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt, \\
V_1 \left( \frac{1}{2} - x, \lambda \right) &= \cos \sqrt{\lambda} (-x) + \int_{-x}^x k_2(x, t) \cos \sqrt{\lambda} (-t) dt, \\
V_2 \left( \frac{1}{2} + x, \lambda \right) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} + \int_{-x}^x k_1(x, t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt, \\
V_2 \left( \frac{1}{2} - x, \lambda \right) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda} (-x)}{\sqrt{\lambda}} + \int_{-x}^x k_2(x, t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} (-t)}{\sqrt{\lambda}} dt, \quad (3.4.7)
\end{aligned}$$

где  $V_1(t, \lambda)$ ,  $V_2(t, \lambda)$  были введены при доказательстве теоремы 3.4.1. Поскольку определитель

$$\psi(t, \lambda) = \begin{vmatrix} y_1(1-x, \lambda) & y_2(1-x, \lambda) \\ y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) \end{vmatrix}$$

При переходе от одной фундаментальной системе решений к другой системе с тем же вронскианом не меняется, то вместо  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  можно взять фундаментальную систему решений  $V_1(t, \lambda)$ ,  $V_2(t, \lambda)$ .

$$\psi(t, \lambda) = \begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda}(-x) + \int_{-x}^x k_2(x, t) \cos \sqrt{\lambda}(-t) dt & \frac{\sin \sqrt{\lambda}(-x)}{\sqrt{\lambda}} + \int_{-x}^x k_2(x, t) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(-t)}{\sqrt{\lambda}} dt \\ \cos \sqrt{\lambda}x + \int_{-x}^x k_1(x, t) \cos \sqrt{\lambda} t dt & \frac{\sin \sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_{-x}^x k_1(x, t) \frac{\sin \sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}} dt \end{vmatrix}$$

Поскольку определитель линии относительно своих строк, то при  $x \in [0, \frac{b}{2}]$  имеем

$$\begin{aligned} \psi(x, \lambda) &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}2x}{\sqrt{\lambda}} + \int_{-x}^x k_2(x, t) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x+t)}{\sqrt{\lambda}} dt + \\ &+ \int_{-x}^x k_1(x, t) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(x+t)}{\sqrt{\lambda}} dt + \int_{-x}^x dt \int_{-x}^x d\tau k_1(x, t) k_2(x, \tau) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\tau+T)}{\sqrt{\lambda}} = \\ &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}2x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{2x} k_2(x, T-x) \frac{\sin \sqrt{\lambda}T}{\sqrt{\lambda}} dT + \int_0^{2x} k_1(x, T-x) \frac{\sin \sqrt{\lambda}T}{\sqrt{\lambda}} dT + \\ &+ \int_0^{2x} \frac{\sin \sqrt{\lambda}T}{\sqrt{\lambda}} dT \left( \int_{T-x}^x k_1(x, t) k_2(x, T-t) dt - \int_{-x}^{x-T} k_1(x, t) k_2(x, -T-t) dt \right) = \\ &= \frac{\sin \sqrt{\lambda}2x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{2x} H(x, T) \frac{\sin \sqrt{\lambda}T}{\sqrt{\lambda}} dt, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} H(x, T) &= k_2(x, T-t) + k_1(x, T-x) + \\ &+ \int_{T-x}^x k_1(x, t) k_2(x, T-t) dt - \int_{-x}^{x-T} k_1(x, t) k_2(x, -T-t) dt \end{aligned} \quad (3.4.8)$$

Следовательно, характеристический определитель

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \int_0^{b/2} Q\left(\frac{1}{2}\right) \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda}2x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^{2x} H(x, t) \frac{\sin \sqrt{\lambda}T}{\sqrt{\lambda}} dT \right) dx = \\ &= \int_0^b Q\left(\frac{T}{2} + \frac{b}{2}\right) \frac{\sin \sqrt{\lambda}T}{\sqrt{\lambda}} dT + \int_0^b \frac{\sin \sqrt{\lambda}T}{\sqrt{\lambda}} dt \int_{t/2}^{b/2} Q\left(\frac{b}{2} + x\right) H(x, T) dx = \end{aligned}$$

$$\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} T}{\sqrt{\lambda}} \left( Q \left( \frac{T}{2} + \frac{b}{2} \right) + \int_{t/2}^{1/2} Q \left( \frac{1}{2} + x \right) H(x, T) dx \right) dT.$$

Отсюда

$$D(T) = \left( \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \right) + \int_{t/2}^{b/2} Q \left( \frac{1}{2} + x \right) H(x, T) dx. \quad (3.4.9)$$

### 3.5 Асимптотика собственных значений оператора $L$

В этом пункте, используя представление (3.4.6), найдем приближенные формулы для собственных значений оператора  $L$ , введенного в 3.3. Интегрируя по частям, перепишем формулу (3.4.6) в виде

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} 2x}{\sqrt{\lambda}} Q \left( \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \right) dT + \frac{1}{\lambda} \int_0^{1/2} Q \left( \frac{1}{2} + x \right) H(x, 0) dx - \\ & - \frac{1}{2\lambda} \int_0^1 \cos \sqrt{\lambda} T Q \left( \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \right) H \left( \frac{T}{2}, T \right) dT + \int_{t/2}^{1/2} Q \left( \frac{1}{2} + x \right) \frac{\partial}{\partial T} H(x, T) dT. \end{aligned}$$

Из формул (3.1.12) – (3.1.13) следует, что

$$H(x, 0) = k_1(x, -x) + k_2(x, -x) = 0,$$

$$\begin{aligned} H \left( \frac{T}{2}, 0 \right) &= k_2 \left( \frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right) + k_1 \left( \frac{T}{2}, \frac{T}{2} \right) = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} q \left( \frac{1}{2} - t \right) dt + \\ & \frac{1}{2} \int_0^{\frac{T}{2}} q \left( \frac{1}{2} + t \right) dt = \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{q \left( \frac{1}{2} - t \right) + q \left( \frac{1}{2} + t \right)}{2} dt. \end{aligned}$$

Следовательно, характеристический определитель имеет вид

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \int_0^b \frac{\sin \sqrt{\lambda} T}{\sqrt{\lambda}} Q \left( \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \right) dT + \\ & + \frac{1}{4\lambda} \int_0^b \cos \sqrt{\lambda} T \left[ Q \left( \frac{T}{2} + \frac{1}{2} \right) dT + \int_{T/2}^{b/2} Q \left( \frac{1}{2} + x \right) \frac{\partial}{\partial T} H(x, T) dT \right] dT. \end{aligned}$$

Обозначим через  $\Delta_0(\lambda)$  целую функцию

$$\Delta(\lambda) = \int_0^1 \frac{\sin \sqrt{\lambda} T}{\sqrt{\lambda}} Q\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\right) dT.$$

Считая  $Q(x)$  гладкой функцией, путем интегрирования по частям получим представление

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= -\frac{\cos \sqrt{\lambda} T}{\sqrt{\lambda}} Q\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\right) \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\cos \sqrt{\lambda} T}{\sqrt{\lambda}} Q'\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\right) dT = \\ &= \frac{1}{2} Q\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{\cos \sqrt{\lambda}}{\lambda} Q(b) + \frac{1}{2} \int_0^b \frac{\cos \sqrt{\lambda} T}{\sqrt{\lambda}} Q'\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\right) dT. \end{aligned}$$

Пусть  $Q(1) \neq 0$ . Найдем нули

$$h(x) = Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q(1) \cos \sqrt{\lambda}$$

по формуле  $\sqrt{\lambda_k^0} = \frac{2k\pi}{1} + \text{const}$ ,  $k$  – целое число.

Возьмем квадрат с центром в точке  $\sqrt{\lambda_k^0}$  и сторонами длины  $2\varepsilon$  параллельными осями  $Re \sqrt{\lambda}$  и  $Im \sqrt{\lambda}$ . Число  $\varepsilon$  пока произвольное положительное. Оценим  $h(\lambda)$  на сторонах квадрата снизу, считая  $\varepsilon(k) \rightarrow 0$  при  $k \rightarrow \infty$ .

$$|h(\lambda) - h(\lambda_k^0)| \geq |\lambda - \lambda_k^0| \min|h'(\lambda)| \geq \varepsilon \min|h'(\lambda)| \geq c\varepsilon^2 k \quad (3.5.2)$$

Оценим интеграл на стороне квадрата

$$|\Delta_0(\lambda) - h(\lambda)| \leq c\delta(\sqrt{\lambda}) = \bar{o}(1), \quad (3.5.3)$$

где  $\delta(\sqrt{\lambda}) \rightarrow 0$  при  $\sqrt{\lambda} \rightarrow \infty$ . Действительно, верно равенство

$$\delta(\sqrt{\lambda}) = \frac{1}{2} e^{-|Im \sqrt{\lambda}|} \int_0^1 \cos \sqrt{\lambda} T Q'\left(\frac{T}{2} + \frac{1}{2}\right) dT,$$

в котором  $Im \sqrt{\lambda}$  ограничено, а  $Re \sqrt{\lambda}$  стремится к бесконечно. Тогда применяем известную лемму Римана, откуда  $\lim_{Re \sqrt{\lambda} \rightarrow \infty} \delta(\sqrt{\lambda}) = 0$ .

Точно также оценивается разность  $|\Delta(\lambda) - h(\lambda)|$ . Для применения теоремы Руше остается выбрать  $\varepsilon$  из условия

$$c\varepsilon^2 k > \bar{o}(1),$$

то есть возьмем  $\varepsilon = \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ . Тогда, вспоминая неравенства (3.5.2) и (3.5.3), на сторонах квадрата имеем

$$|h(\lambda)| > |\Delta(\lambda) - h(\lambda)|.$$

Итак, доказана теорема.

**Теорема 3.5.1.** Пусть  $Q(x) \in W_2' \left[ \frac{1}{2}, 1 \right]$ , причем  $Q(1) \neq 0$ . Тогда вне некоторого круга комплексной  $\lambda$  плоскости существует взаимно-однозначное соответствие между нулями  $\Delta(\lambda)$  и  $h(\lambda) = Q\left(\frac{1}{2}\right) - Q(1) \cos \sqrt{\lambda}$ . Больше того возможна такая нумерация нулей функции  $\Delta(\lambda)$ , что верна асимптотика

$$\sqrt{\lambda_{k+\tau}} = \frac{2k\pi}{1} + \text{const} + \bar{o}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad k \rightarrow \infty.$$

Когда  $Q\left(\frac{1}{2}\right) = Q(1)$ , то нули  $\sqrt{\lambda_{k+\tau}}$  асимптотически двукратны. Число  $\tau$  возникло за счет исключительно круга, указанного в теореме 3.5.1.

**Теорема 3.5.2.** Пусть

$$Q(x) \in L_2 \left[ \frac{1}{2}, 1 \right] \text{ и } \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{1-\delta}^1 Q(x) dx, \quad dx \neq 0 \quad x \neq 0.$$

Тогда все нули  $\Delta(\lambda)$  лежат в полосе  $|Im \sqrt{\lambda}| < h < \infty$ . Обозначим через  $n(t)$  число нулей  $\Delta(\lambda)$  в прямоугольнике  $|Im \sqrt{\lambda}| < h, Re \sqrt{\lambda} \leq t$ , то  $n(t) = \frac{1}{\pi} t + \underline{o}(1)$ .

**Доказательство.** Рассмотрим множество  $B$  целых функций экспоненциального типа с нормой

$$\|f(z)\| = \sup_{\substack{\tau > 0 \\ 0 \leq \theta < 2\pi}} (f(re^{i\theta})e^{-r|\sin \theta|}), \quad z = re^{i\theta} \quad (3.5.4)$$

Указанное множество  $B$  будет банаховым пространством [40]. Определим класс целых функций  $E$ , приближаемых по норме  $B$  экспоненциальными многочленами, показатели которых лежат на вертикальном отрезке  $[-1, 1]$ . Заметим, что  $f(z) = z\Delta(z^2)$  принадлежит выделенному классу  $E$ . Действительно, из представления (3.4.6) функция  $f(z)z$  при  $D(x)$  кусочно-постоянной на  $[0, 1]$  является экспоненциальным многочленом

$$z^2\Delta(z^2) = \sum_{j=0}^N c_j \cos z \left( j \frac{1}{N} \right),$$

где  $c_j$  – комплексные числа.

В общем случае, когда  $D(x) \in L_2[0, 1]$ , выдерем кусочно-постоянную функцию  $C(x)$  так, что

$$\int_0^1 |D(x) - C(x)|^2 dx < \varepsilon,$$

при  $\varepsilon > 0$ . Тогда

$$f(z) = \int_0^1 \sin zx C(x) dx + \int_0^1 \sin zx (D(x) - C(x)) dx.$$

Справедливо неравенство

$$\left| \int_0^1 \sin zx (D - C) dx e^{-|z| \sin \text{Arg} z} \right| \leq \|D - C\|_{L_2} \sqrt{1} \leq \sqrt{1} \varepsilon.$$

Следовательно, функция  $f(z)$  приближается экспоненциальными многочленами по норме (3.5.4). В монографии [40] показано, что

$$n(t) = \frac{1}{\pi} t + \underline{o}(1)$$

если точки  $i, -i$  индикаторной диаграммы входят в спектр функций  $f(z)$ . Для экспоненциальных многочленов, приближающих  $f(z)$  указанные точки диаграммы входят в спектр почти – периодической функции, так как

$$\frac{1}{\delta} \int_{1-\delta}^1 Q(x) dx \neq 0$$

является множителем в многочлене при соответствующей экспоненте. На странице 375 в монографии [40] указано, что тогда для предельной функции  $f(z)$ , точки  $\pm i$  будут входить в ее спектр.

**Замечание 3.5.1.** В теореме 3.5.2 требование

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} \int_{1-\delta}^1 Q(x) dx \neq 0$$

можно заменить на любое другое ограничение смысл, которого сводится к интерпретации неравенства  $Q(1) \neq 0$  для функции из  $L_2$ .

**Замечание 3.5.2.** Теоремы 3.5.1 и 3.5.2 сформулированы для нулей характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$ , то эти утверждения верны и для собственных значений оператора  $L$ , введенного в 3.3.

### 3.6 Примеры, когда собственные значения оператора $L$ вычисляются точно

В предыдущем пункте даны приближенные формулы для спектра  $L$ . Теперь укажем точные формулы при некоторых  $q(x)$ .

Пример. Когда условия Марченко нарушаются, но нами построен пример с сохранением полноты.

В работе [33] в качестве  $q(x)$  взята «ступенька»:

$$\begin{aligned} q(x) &= a \quad \text{при } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ q(x) &= c \quad \text{при } \frac{b}{2} \leq x \leq 1. \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

**Утверждение 3.6.1.** Спектр оператора  $L$ , когда  $q(x)$  задается в виде (3.6.1), вычисляется точно по следующим формулам

$$\lambda_{2k} = \frac{4k^2 \pi^2}{1^2} + a, \quad \lambda_{2k-1} = \frac{4k^2 \pi^2}{1^2} + c, \quad k \in N.$$

**Доказательство.** В этом случае  $Q(x) = c - a$ . Поэтому характеристический определитель согласно теореме 3.4.1 имеет вид

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= (c - a) \int_{\frac{1}{2}}^1 \left| \begin{array}{cc} \cos \sqrt{\lambda - a}(1 - x) & \frac{\sin \sqrt{\lambda - a}(1 - x)}{\sqrt{\lambda - a}} \\ \cos \sqrt{\lambda - cx} & \frac{\sin \sqrt{\lambda - cx}}{\sqrt{\lambda - c}} \end{array} \right| dx = \\
&= \frac{c - a}{2} \int_{\frac{1}{2}}^1 \left[ \frac{\sin(\sqrt{\lambda - cx} + \sqrt{\lambda - a}(1 - x)) - \sin(\sqrt{\lambda - cx} + \sqrt{\lambda - a}(1 - x))}{\sqrt{\lambda - a}} - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin(\sqrt{\lambda - cx} + \sqrt{\lambda - a}(1 - x)) - \sin(\sqrt{\lambda - ax} + \sqrt{\lambda - a}(1 - x))}{\sqrt{\lambda - a}} \right] dx - \\
&\quad - \int_{\frac{1}{2}}^1 (\sqrt{\lambda - c} - \sqrt{\lambda - a}) \sin(\sqrt{\lambda - cx} + \sqrt{\lambda - a}(1 - x)) dx = \\
&= \frac{a - c}{2\sqrt{\lambda - c}\sqrt{\lambda - a}} \left( \cos(\sqrt{\lambda - c} + \sqrt{\lambda - a}) \frac{1}{2} - \cos(\sqrt{\lambda - c} - \sqrt{\lambda - a}) \frac{1}{2} \right) = \\
&= (c - a) \frac{\sin \sqrt{\lambda - c} \frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda - c}} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda - a} \frac{1}{2}}{\sqrt{\lambda - a}} = 0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что собственные значения распадаются на две серии так, что

**Замечание 3.6.1.** В 1929 году В.А. Амбарцумян доказал замечательный факт: спектра задачи  $-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x)$ ,  $y(0) = y(\pi) = 0$  равен  $\{\lambda_n = n^2, n \in N\}$  тогда и только тогда, когда  $q(x) = 0$  почти всюду на  $[0, 1]$ . В связи с утверждением 3.6.1 возникает вопрос: нет ли аналога теоремы В.А. Амбарцумяна?

**Замечание 3.6.2.** В работе Джумабаева С.А. [41] приведены примеры операторов  $L$ , когда удается точно вычислить только часть собственных значений.

**Пример 3.6.1.** [41] Пусть

$$q(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \\ \left(x - \frac{\pi}{2}\right)(x - \pi), & x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]. \end{cases}$$

Тогда часть собственных значений оператора  $L$  имеет вид  $\lambda_k = (4k + 2)^2, k = 0, 1, \dots$

**Пример 3.6.2.** [41]. Пусть  $q(x)$  обладает симметрией на  $\left[0, \frac{b}{4}\right]$  относительно середины  $\frac{1}{8}$ , а на  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$  функция обладает двойной симметрией, то есть



$$q(x) = q\left(\frac{3}{2} - x\right), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right],$$

$$q(x) = q\left(\frac{5}{4} - x\right), \quad x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{8}\right].$$

тогда значения задачи

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda y(x), \quad x \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$y(0) = 0, \quad y'\left(\frac{1}{4}\right) = 0,$$

также будут собственными значениями оператора  $L$ . В частности, если  $q(x) \equiv 0$  на  $\left[0, \frac{1}{4}\right]$ , то собственными значениями оператора являются числа  $(4k + 2)^2$ ,  $k \geq 0$ .

**Доказательство.** Заметим, что если  $q(x) \in L$  симметрично на  $[c, d]$  относительно середины  $\xi = \frac{c+d}{2}$ , то решения из уравнения  $-u_j'(x) + q(x)u_j = \lambda u_j(x)$  с условиями  $u_1(\xi) = 0$ ,  $u_2'(\xi) = 0$  обладают свойствами

$$u_1(x + \xi) = -u_1(\xi - x), \quad u_2(x + \xi) = u_2(\xi - x), \quad x \in [c, \xi].$$

Это, по существу, доказано при доказательстве 3.3.1.

### 3.7 Целые функции, порождающие корневые функции оператора $L$

Для оператора  $M$ , порожденного операцией

$$My(x) = -y''(x) + q(x)y(x)$$

и распадающимися краевыми условиями

$$y'(0) - hy(0) = 0, \quad y'(1) - Hy(1) = 0,$$

существует целая по  $\lambda$  функция  $\varphi(x, \lambda)$ , которая на спектре обращается в собственные, а ее производные – в присоединенные функции.  $\varphi(x, \lambda)$  определяется как решение уравнения (3.1.2) с условиями в нуле

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = h.$$

Для операторов, связанных с не распадающимися краевыми условиями

$$\sum_{j=0}^1 \alpha_{ij} y^{(1)}(0) + \sum_{j=0}^1 \beta_{ij} y^{(1)}(1) = 0, \quad i = 1, 2$$

Обычно рассматриваются [42] не одну, а две функции  $\varphi_1(x, \lambda)$ ,  $\varphi_2(x, \lambda)$ . Часть собственных функций порождает, а другая часть получается с помощью  $\varphi_2(x, \lambda)$ . Функции  $\varphi_1(x, \lambda)$ ,  $\varphi_2(x, \lambda)$  определяются, как решения уравнения (3.1.2) с дополнительными условиями

$$\begin{cases} \varphi_1(0, \lambda) - \varphi_1(1, \lambda) = \Delta(\lambda), & \varphi_2(0, \lambda) - \varphi_2(1, \lambda) = 0, \\ \varphi_1'(0, \lambda) + \varphi_1'(1, \lambda) = 0, & \varphi_2'(0, \lambda) + \varphi_2'(1, \lambda) = \Delta(\lambda). \end{cases} \quad (3.7.1)$$

Поэтому

$$\varphi_1(x, \lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) \\ y_1'(0, \lambda) + y_1'(1, \lambda) & y_2'(0, \lambda) + y_2'(1, \lambda) \end{vmatrix},$$

$$\varphi_2(x, \lambda) = \begin{vmatrix} y_1(0, \lambda) - y_1(1, \lambda) & y_2(0, \lambda) - y_2(1, \lambda) \\ y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) \end{vmatrix},$$

где  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$  фундаментальная система решений из пункта 3.2. Заметим, что одновременно  $\varphi_1(x, \lambda)$ ,  $\varphi_2(x, \lambda)$  не могут быть тождественными нулями по  $x$  при фиксированном  $\lambda$ . Допустим противное, тогда

$$y_k(0, \lambda) = y_k(1, \lambda), \quad y'_k(0, \lambda) = -y'_k(1, \lambda), \quad k = 1, 2$$

Следовательно, равенство вронскианов

$$\begin{vmatrix} y_1(0, \lambda) & y_2(0, \lambda) \\ y'_1(0, \lambda) & y'_2(0, \lambda) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1(1, \lambda) & y_2(1, \lambda) \\ y'_1(1, \lambda) & y'_2(1, \lambda) \end{vmatrix}$$

не может выполняться. Отсюда следует лемма.

**Лемма 3.7.1.** Оператор  $L$  не может иметь двух собственных функций для фиксированного собственного значения  $\lambda$ . Каждая собственная функция совпадает с одним из решений  $\varphi_1(x, \lambda)$  или  $\varphi_2(x, \lambda)$ , а присоединенная с производной по  $\lambda$  от  $\varphi_1(x, \lambda)$  или  $\varphi_2(x, \lambda)$ . Таким образом, максимальная цепочка собственной и присоединенных функций, соответствующая собственному значению  $\lambda$  имеет вид

$$\begin{aligned} &\text{либо } \varphi_1(x, \lambda), \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_1(x, \lambda), \dots, \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \lambda^{p-1}} \varphi_1(x, \lambda), \\ &\text{либо } \varphi_2(x, \lambda), \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_2(x, \lambda), \dots, \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \lambda^{p-1}} \varphi_2(x, \lambda), \end{aligned} \quad (3.7.2)$$

где  $p$  кратность собственного значения  $\lambda$ . Каждая из последовательностей (3.7.2), если в ней есть ненулевые элементы, будет состоять из собственной и присоединенных функций.

**Доказательства** требует только заключительный тезис леммы.

Пусть  $\lambda_0$  собственное значения оператора  $L$  кратности  $p_0$ . Если  $\varphi_1(x, \lambda_0)$  не является тождественным нулем, то будет соответствующей собственной функцией. Пусть  $\varphi_1(x, \lambda_0)$  собственная функция. Тогда дифференцируя по  $\lambda$  уравнение (3.1.2) и краевые условия (3.7.1), а также учитывая  $\Delta'(\lambda_0) = 0$ , получим, что  $\frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi_1(x, \lambda) \Big|_{\lambda=\lambda_0}$  – первая присоединенная функция. Ясно, что присоединенных будет столько сколько производных  $\Delta(\lambda)$  при  $\lambda = \lambda_0$  – обращается в нуль, то есть длины цепочки равна  $p_0$ . Когда  $\varphi_1(x, \lambda_0)$  тождественный нуль, то  $\varphi_2(x, \lambda_0)$  не может быть нулевой функцией. Лемма доказана.

**Замечание 3.7.1.** Из леммы 3.7.1 видим, что собственные и присоединенные функции строятся иногда по  $\varphi_1(x, \lambda_0)$ , иногда по  $\varphi_2(x, \lambda_0)$ . В этом заключается существенное отличие операторов с не распадающимися краевыми условиями от распадающихся.

Целью настоящего пункта является введение функции  $\varphi(x, \xi, \lambda)$ , которая порождает всю систему собственных и присоединенных функций оператора  $L$ . Для этого запишем вид функции Грина из [9] для уравнения  $Lu = \lambda u + f(x)$ .

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{H(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

где

$$H(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & q(x, \xi) \\ 1 - y_1(1) & -y_2(1) & q(0, \xi) - q(1, \xi) \\ y_1'(1) & 1 + y_2'(1) & q'_x(0, \xi) - q'_x(1, \xi) \end{vmatrix},$$

$$q(x, \xi) = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) \\ y_1(\xi, \lambda) & y_2(\xi, \lambda) \end{vmatrix}'$$

знак «+» берется, если  $x \geq \xi$ , знак «-» берется, если  $x < \xi$ .

Распишем выражения

$$2q(0, \xi) - 2q(1, \xi) = -y_2(\xi, \lambda) - y_1(1, \lambda)y_2(\xi, \lambda) + y_2(1, \lambda)y_1(\xi, \lambda),$$

$$2q'_x(0, \xi) - 2q'_x(1, \xi) = y_1(\xi, \lambda) + y_1'(1, \lambda)y_2(\xi, \lambda) + y_2'(1, \lambda)y_1(\xi, \lambda),$$

Вычитая из третьего столбца  $H(x, \xi, \lambda)$  линейную комбинацию первых двух, получим

$$H(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & \tilde{q}(x, \xi) \\ 1 - y_1(1) & -y_2(1) & -y_2(\xi, \lambda) \\ y_1'(1) & 1 + y_2'(1) & y_1(\xi, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Обозначим числитель главной части функции Грина  $G(x, \xi, \lambda)$  через  $\varphi(x, \xi, \lambda)$

$$\varphi(x, \xi, \lambda) = \begin{vmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & 0 \\ 1 - y_1(1) & -y_2(1) & -y_2(\xi, \lambda) \\ y_1'(1) & 1 + y_2'(1) & y_1(\xi, \lambda) \end{vmatrix}.$$

**Лемма 3.7.2.** При некотором  $\xi \in [0, 1]$  функция  $\psi(x, \xi, \lambda)$  порождает всю систему собственных и присоединенных функций оператора  $L$ . Цепочка собственных и присоединенных функций, соответствующая собственному значению  $\lambda$  кратности  $p$  строится по формуле

$$\varphi(x, \xi, \lambda), \frac{1}{1!} \frac{\partial}{\partial \lambda} \varphi(x, \xi, \lambda), \dots, \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial \lambda^{p-1}} \varphi(x, \xi, \lambda).$$

Для доказательства достаточно проверить, что найдется  $\xi$  из  $[0, 1]$ , для которого  $\varphi(x, \xi, \lambda)$  ненулевой элемент пространства  $L_2[0, 1]$  при произвольном  $\lambda$  из спектра оператора  $L$ . Если  $\psi(x, \xi, \lambda)$  нулевой элемент в  $L_2[0, 1]$ , то

$$\begin{cases} (1 - y_1(1, \lambda))y_1(\xi, \lambda) + y_1'(1, \lambda)y_2(\xi, \lambda) = 0, \\ (1 + y_2'(1, \lambda))y_2(\xi, \lambda) - y_2(1, \lambda)y_1(\xi, \lambda) = 0. \end{cases} \quad (3.7.3)$$

Если  $\xi$  меняется на некотором отрезке положительной длины, то из (3.7.3) следует

$$y_1(1, \lambda) = 1, \quad y_1'(1, \lambda) = y_2(1, \lambda) = 0, \quad y_2'(1, \lambda) = -1. \quad (3.7.4)$$

Последнее противоречит тому, что вронсиан  $y_1, y_2$  равен 1. Точно также можно рассуждать для счетного множества  $\xi$ .

Следовательно, для фиксированного  $\lambda$  только конечное число  $\xi$  удовлетворяет системе (3.7.3). Поскольку, спектр счетен, то система (3.7.4) удовлетворяет только счетное число  $\xi$ . Поэтому существует  $\xi$  из  $[0,1]$ , для которой не может быть справедливой система (3.7.3) ни при каком  $\lambda$  из спектра оператора  $L$ . Лемма 3.7.2 доказана.

**Замечание 3.7.2.** Для  $\xi$  существует отрезок положительной длины из  $[0,1]$ , где верна лемма 3.7.2.

Причем, этот отрезок может быть расположен на произвольном  $[c, d]$  из  $[0,1]$ .

**Следствие 3.7.1.** В пространстве  $L_2[0, b]$  существует такой элемент  $f(x)$ , что функция  $\psi(x, \lambda) = \int_0^1 \varphi(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi$  порождает все собственные и присоединенные функции оператора  $L$ .

Достаточно взять  $f(\xi)$  с носителем на отрезке, о котором идет речь в замечании 3.7.1. Таких функций несчетно и, следовательно, можно применить рассуждения из доказательства леммы 3.7.2.

**Следствие 3.7.2.** Оператор  $L$  имеет циклический элемент [9], если система собственных и присоединенных функций полна в  $L_2[0, b]$ .

### 3.8 О полноте системы корневых функций оператора $L$

В данном разделе изучается вопрос о полноте системе собственных и присоединенных функций операторов в гильбертовом сепарабельном пространстве  $L_2[0, b]$ .

Пусть  $f(x) \in L_2[0, b]$  ортогональна каждой корневой функции оператора  $L$ . Используя (3.7.2), ортогональность запишем в виде

$$\int_0^b \varphi_k(x, \lambda_j) f(x) dx = 0,$$

$$\int_0^b \frac{1}{1!} \frac{\partial \varphi_k(x, k)}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=\lambda_1} f(x) dx = 0,$$

.....

$$\int_0^b \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^{p_j-1} \varphi_k(x, k)}{\partial \lambda^{p_j-1}} \Big|_{\lambda=\lambda_1} f(x) dx = 0, \quad j \in N, \quad k = 1, 2. \quad (3.8.1)$$

Здесь  $\lambda_j$  означает собственное значение оператора  $L$  кратности  $p_j$ . Введем целые функции

$$F_k(\lambda) = \int_0^b \varphi_k(x, \lambda) f(x) dx, \quad k = 1, 2 \quad (3.8.2)$$

**Лемма 3.8.1.** При каждом  $k$  целая функция  $F_k(\lambda)$  обращается в нуль при  $\lambda = \lambda_j$  не менее  $p_j$  раз.

Утверждение леммы 3.8.1 следует из соотношений (3.8.1).

**Лемма 3.8.2.** При каждом  $k$  целая функция  $F_k(\lambda)$  оценивается сверху следующим неравенством:

$$|F_k(\lambda)| \leq \frac{C_k (e^{|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|b} + 1)}{\sqrt{|\lambda|}}, \quad k = 1, 2, \quad C_k = \text{const.}$$

Из результатов 3.7 видим, что

$$\varphi_2(x, \lambda) = \begin{vmatrix} V_1(0, \lambda) - V_1(b, \lambda) & V_2(0, \lambda) - V_2(b, \lambda) \\ V_1(x, \lambda) & V_2(x, \lambda) \end{vmatrix},$$

где  $V_1, V_2$  решения, определяемые формулами (3.4.7). Отсюда

$$F_1(\lambda) = \begin{vmatrix} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\lambda}(-t) M(t) dt \\ (-\beta - \alpha) \cos \sqrt{\lambda} \frac{b}{2} + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} H_2(t) \cos \sqrt{\lambda}(-t) dt \\ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(-t)}{\sqrt{\lambda}} M(t) dt \\ 2 \cos \sqrt{\lambda} \frac{b}{2} + (\beta + \alpha) \frac{\sin \sqrt{\lambda} \frac{b}{2}}{\sqrt{\lambda}} + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} H_2(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda}(-t)}{\sqrt{\lambda}} dt \end{vmatrix}$$

где  $\alpha = k_2\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ,  $\beta = k_1\left(\frac{b}{2}, \frac{b}{2}\right)$ ,  $H_2(t) = \frac{\partial}{\partial x} k_1(x, t) - \frac{\partial}{\partial x} k_2(x, t) \Big|_{x=\frac{b}{2}}$

Вычислим определитель  $F_1(\lambda)$ , тогда

$$F_1(\lambda) = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} p(t) \cos \sqrt{\lambda} \left( \frac{b}{2} - t \right) dt \quad (3.8.8)$$

где

$$p(t) = M(t) + M(-t) + (\beta + \alpha) \int_{-\frac{b}{2}}^t \frac{M(\tau) + M(-\tau)}{2} d\tau +$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\beta - \alpha}{2} \int_{-\frac{b}{2}}^t (M(\tau) - M(-\tau)) d\tau + \int_{\frac{b}{2}}^t R_2(\tau) d\tau \quad (3.8.9) \\
R_2(\tau) &= - \int_{-\tau}^{\frac{b}{2}} M\left(s + \tau - \frac{b}{2}\right) H_2(s) ds + \int_{-\tau}^{\frac{b}{2}} M(s) H_2\left(s + \tau - \frac{b}{2}\right) ds = \\
& \int_{-\tau}^{\frac{b}{2}} M(s) H_2\left(s + \tau - \frac{b}{2}\right) ds - \int_{\frac{b}{2}}^{\tau} M(s) H_2\left(s - \tau + \frac{b}{2}\right) d\tau = \\
& = \int_{-\frac{b}{2}}^t (M(-s) - M(s)) H_2\left(s - \tau + \frac{b}{2}\right) ds.
\end{aligned}$$

**Лемма 3.8.3.** Для характеристического определителя  $\Delta(\lambda)$  вне кружков с центром в ее нулях и радиусами  $\varepsilon$  справедлива оценка

$$|\Delta(\lambda)| \geq \text{const} \frac{e^{|\text{Im}\sqrt{\lambda}|b}}{|\lambda|} \quad \text{на лучах} \quad \lambda = |\lambda|e^{i \text{const}},$$

если  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \int_{b-\delta}^b Q(x) dx \neq 0$ .

**Доказательство.** Пусть  $\{\lambda_j\}$  означает множество нулей  $\Delta(\lambda)$ . Не умоляя общности, можно считать их однократными нулями, так как случай однократных нулей есть предельный случай простых нулей. Поэтому оценки данные ниже справедливы для функции с простыми нулями будут выполняться и для функции с простыми кратностями. Заметим, что целая функция  $\Delta(\lambda)$  имеет порядок роста  $\frac{1}{2}$ . Тогда по теореме Адамара [40] имеет при  $c \neq 0$ .

$$\Delta(\lambda) = C \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right),$$

поскольку  $C = \int_0^b D(x) dx$ , где  $D(x)$  определяется по формуле (3.4.9).

Когда  $C = 0$ , то теореме Адамара дает представление

$$\Delta(\lambda) = \lambda^m C_1 \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_j}\right),$$

где  $m$  – кратность нулевого корня,  $C_1$  – некоторое число отличное от нуля.

Теперь к функции (3.8.10) применим теорему 3.8.1 из [40], тогда  $\lim_{\tau \rightarrow 0} r^{-\frac{1}{2}} \left[ \ln |\Delta(re^{i\theta})| - br^{\frac{1}{2}} |\sin \theta| \right] = 0$  при  $\lambda = re^{i\theta}$  не принадлежащем

некоторому  $c^0$  – множеству на комплексной  $\lambda$  плоскости. Поэтому вне некоторого  $O^0$  – множества верна оценка для любого  $\varepsilon > 0$

$$|\Delta(re^{i\theta})| \geq e^{(b-\varepsilon)\tau^{1/2}|\sin\theta|} \quad \text{при } r > r_0. \quad (3.8.11)$$

Неравенство (3.8.11) справедливо для произвольного числа  $\varepsilon$ . Для полного доказательства леммы 3.8.3 нам необходимо получить более точную оценку, то есть избавимся от  $\varepsilon$ .

Пусть  $E_{\delta,n}$  означает множество комплексных  $\rho$  из полосы  $|Im \rho| \leq h$  и вне кружков с центрами в нулях  $\Delta(\rho^2)$  и радиусами  $\delta$ .

Рассмотрим для любых  $h > 0, h > \delta > 0$

$$\gamma = \inf |\Delta(\lambda)| \quad \text{при } |Im \sqrt{\lambda}| \leq h.$$

Допустим  $\gamma = 0$ . Тогда в указанной области существует последовательность  $\{\rho_j = \sqrt{\lambda_j}\}$  такая, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \Delta(\rho_j^2) = 0$ . Пусть  $\rho_j = x_j - iy_j$ .

Введем последовательность функции  $\{\varphi_j(\rho) = \Delta((\rho + x_j)^2)\}$ .

Покажем, что эта последовательность функции равномерно ограничена.

Действительно, верно неравенство

$$|\varphi_j(\rho)| = \left| \int_0^b \frac{\sin(\rho + x_j)t}{\rho + x_j} D(t) dt \right| \leq \frac{c}{|\rho + x_j|},$$

так как  $|\sin(\rho + x_j)t| \leq c_1$ , при  $|Im \rho| \leq h$ . Следовательно, по теореме Монтеля [43] существует подпоследовательность  $\{\varphi_{n_j}(\rho)\}$ , сходящаяся равномерно на любом компакте из полосы  $|Im \rho| \leq h$ . Из сходимости на компактах следует сходимость в полосе благодаря следующему неравенству

$$|\varphi_{n_j}(\rho) - \varphi_{n_k}(\rho)| \leq \frac{2c}{|\rho + x_j|}$$

при  $\rho \rightarrow \infty$ . Итак, последовательность  $\{\varphi_{n_j}(\rho)\}$  равномерно сходится к  $\Delta_0(\lambda)$  в полосе  $|Im \rho| \leq h$ . Пусть  $iy_0$  предельная точка множества  $\{iy_j, j \geq 1\}$ . Тогда  $\Delta_0(iy_0) = 0$ . По теореме Гурвица [43] о корнях равномерно сходящейся последовательности голоморфных функций все члены  $\varphi_{n_j}(\rho)$ , начиная с некоторого, должны иметь корни в  $\delta$  – окрестности точки  $iy_0$ . Следовательно, функция  $\Delta_0(\rho^2)$  имеет бесконечно много нулей в кружках  $|\rho - \rho_j| < \delta$ . Последнее противоречит выбору множества  $E_{\delta,n}$ . Поэтому  $\gamma > 0$ , то есть  $\Delta(\rho^2) > \gamma$  при  $\rho \in E_{\delta,n}$ .

Итак, доказана ограниченность  $|\Delta(\rho^2)|$  от нуля в произвольной горизонтальной полосе с исключительными кружочками в нулях. Отсюда и учитывая неравенство [43] видим, что исключительное  $c^0$  множество для полосы может быть взято в виде кружков с центром в нулях  $\Delta(\rho^2)$ . Теперь взяв в качестве исключительного множества объединение кружков с центрами в нулях  $\Delta(\rho^2)$  докажем оценку типа [43], но при  $\varepsilon = 0$  на лучах из  $\rho = |\rho|e^{i\theta}$ ,

$0 < \theta < \pi$ . Обозначим через  $C_\varepsilon(x)$  кусочно – постоянную функцию на  $\left[\frac{b}{2}, b\right]$  такую, что

$$\|Q(x) - C_\varepsilon(x)\|_{L_2\left[\frac{b}{2}, b\right]} < \varepsilon, \quad (3.8.12)$$

где  $\varepsilon$  – произвольное число. Можно считать, что

$$C_\varepsilon(x) = C_\varepsilon^* = \frac{1}{\delta} \int_{b-\delta}^b Q(t) dt \neq 0$$

при  $x$  из окрестности точки  $b$ , где  $\delta$  может зависеть от  $\varepsilon$ . В силу оценки

$$|\Delta(\rho^2)| \geq \frac{C_\varepsilon^* e^{b|\rho| \sin \theta}}{2|\rho|^2} - \left| \Delta(\rho^2) - \frac{C_\varepsilon^* e^{-ib\rho}}{2|\rho|^2} \right| \quad (3.8.13)$$

достаточно получить верхние неравенства для разности

$$\left| \Delta(\rho^2) - \frac{C_\varepsilon^* e^{b|\rho| \sin \theta}}{2|\rho|^2} \right|$$

Из представления (3.5.1) сначала оценим сверху интеграл

$$\frac{1}{4\rho^2} \int_0^b \cos \rho t G(t) dt, \text{ где } G(t) = Q\left(\frac{b}{2} + \frac{t}{2}\right) H\left(\frac{t}{2}, t\right) + \int_{\frac{t}{2}}^{\frac{b}{2}} Q\left(\frac{b}{2} + x\right) \frac{\partial}{\partial t} H(x, t) dx.$$

Поскольку  $G \in L_2[0, b]$ , то верно неравенство

$$\left| \frac{1}{4\rho^2} \int_0^b \cos \rho t G(t) dt \right| \leq \frac{1}{|\rho|^2} e^{b|\rho| \sin \theta} \bar{o}(1), \quad |\rho| \rightarrow \infty \quad (3.8.14)$$

Оценка следующего интеграла не представляет трудностей

$$\left| \int_0^b C_\varepsilon\left(\frac{b}{2} + \frac{t}{2}\right) \frac{\sin \rho t}{\rho} dt - \frac{C_\varepsilon^* e^{-ib\rho}}{2\rho^2} \right| \leq \frac{1}{|\rho|^2} e^{(b-\delta)|\rho| \sin \theta}. \quad (3.8.15)$$

Наконец, для разности верно

$$\left| \int_0^b \frac{\sin \rho t}{\rho} \left( Q\left(\frac{b}{2} + \frac{t}{2}\right) - C_\varepsilon\left(\frac{b}{2} + \frac{t}{2}\right) \right) dt \right| \leq \frac{e^{b|\rho| \sin \theta}}{2|\rho|} \|Q - C_\varepsilon\|_{L_2} \quad (3.8.16)$$

Итак, учитывая (3.8.12) – (3.8.16), получим требуемую оценку на луче

$$|\Delta(\rho^2)| \geq \frac{C_\varepsilon^* e^{b|\rho| \sin \theta}}{|\rho|} \left( \frac{1}{2|\rho|} - \frac{\bar{o}(1)}{|\rho|} - \frac{e^{-b|\rho| \sin \theta}}{|\rho|} - \|Q - C_\varepsilon\|_{L_2} \right)$$

Выберем  $\varepsilon = \frac{1}{10|\rho|}$ , тогда последняя оценка примет вид  $|\Delta(\rho^2)| \geq \frac{C_\varepsilon^* e^{b|\rho| \sin \theta}}{10|\rho|^2}$  при  $|\rho| \rightarrow \infty$ .

Обозначим через  $\delta \rightarrow 0$  при  $|\rho| \rightarrow \infty$ , получаем лемму 3.8.3.

**Замечание 3.8.1.** В ходе доказательства леммы 3.8.3 получены неравенства (3.8.11) и информация об исключительных  $c^0$  – множествах.



Сформулируем основной результат раздела.

**Теорема 3.8.1.** Пусть  $\int_0^b q(x)dx \neq 0$ ,  $\lim_{\delta \rightarrow \infty} \frac{1}{\delta} \int_{b-\delta}^b Q(x) dx \neq 0$ , а также выполняется условие (А). Тогда система собственных и присоединенных функций оператора  $L$  полна в пространстве  $L_2[0, b]$ .

Условие (А) приведено в конце доказательства теорема 3.8.1.

**Доказательство.** Пусть  $f \in L_2[0, b]$  и ортогональна всем корневым функциям оператора  $L$ . Рассмотрим функцию

$$\Phi_k(\lambda) = \frac{F_k(\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

где  $F_k$  и  $\Delta$  определены раньше. Согласно лемме 3.8.1 получаем, что  $\Phi_k(\lambda)$  целая по  $\lambda$  функция. Из оценок лемм 3.8.2 и 3.8.3 следует неравенство для  $\Phi_k$

$$|\Phi_k(\lambda)| \leq C|\lambda|^{1,5-\frac{k}{2}}, \quad k = 1, 2 \quad (3.8.17)$$

когда  $\lambda$  принадлежит лучу  $\lambda = |\lambda|e^{i\theta}$ ,  $\theta = \text{const}$ . Выбирая четыре луча на  $\lambda$  – плоскости убеждаемся, что оценка (3.8.17) верна на всей плоскости, поскольку можно применить теорему Фрагмена – Линделефа [40]. А тогда по теореме Лиувилля [43] имеем

$$\Phi_k(\lambda) \equiv C_1^k \lambda + C_2^k$$

поэтому  $F_k(\lambda) = (C_1^k \lambda + C_2^k)\Delta(\lambda)$ . Если  $k = 2$ , то  $F_2(\lambda) = C\Delta(\lambda)$ . Это следует из оценки (3.8.6). Вспоминая вид  $F_k(\lambda)$ , то есть формулы (3.8.9) и (3.8.6), получим систему уравнений относительно  $f(x)$ .

$$\begin{cases} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \left(\frac{b}{2} - t\right)}{\sqrt{\lambda}} R(t) dt = C \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \left(\frac{b}{2} - t\right)}{\sqrt{\lambda}} D \left(\frac{b}{2} - t\right) dt, \\ \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\lambda} \left(\frac{b}{2} - t\right) P(t) dt = (E_1 + E_2 \lambda) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \left(\frac{b}{2} - t\right)}{\sqrt{\lambda}} D \left(\frac{b}{2} - t\right) dt, \end{cases} \quad (3.8.18)$$

где  $E_1, E_2, C$  – неизвестные константы,  $P$  и  $R$  зависит от  $f$ ,  $D$  – заданная в  $L_2[0, b]$ .

Вспомним, что при  $\gamma = \lim_{\delta \rightarrow +0} \frac{1}{\delta} \int_{b-\delta}^b Q(x) dx \neq 0$  для  $\Delta(\lambda)$  верна асимптотика  $\Delta(\lambda) = \frac{\gamma \cos \sqrt{\lambda} b}{\lambda} (1 + \bar{o}(1))$ ,  $|\lambda| \rightarrow \infty$ . Учитывая асимптотику  $\Delta(\lambda)$  и переходя к пределу при  $|\lambda| \rightarrow \infty$  во втором равенстве системы (3.8.18), получим  $E_2 = 0$ . Поскольку система (3.8.18) выполняется при любом  $\lambda$ , то в силу полноты систем  $\left\{ \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, \forall \lambda \right\}$  и  $\left\{ \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}, \forall \lambda \right\}$  в пространстве  $L_2[0, b]$  вытекает

$$R(t) = CD \left( \frac{b}{2} - t \right), \quad P(t) = E_1 \int_{-\frac{b}{2}}^t D \left( \frac{b}{2} - t \right) dt, \quad t \notin \left[ -\frac{b}{2}, \frac{b}{2} \right]. \quad (3.8.19)$$

При  $\lambda \rightarrow 0$  получим предельные равенства из соотношения (3.8.18)

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{b}{2} - t \right) R(t) dt = C \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{b}{2} - t \right) D \left( \frac{b}{2} - t \right) dt,$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} P(t) dt = E_1 \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{b}{2} - t \right) D \left( \frac{b}{2} - t \right) dt.$$

Обе части (3.8.19) умножим  $\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{b}{2} - t \right) D \left( \frac{b}{2} - t \right) dt$ , тогда с учетом последних двух предельных равенств исключаем числа  $C$  и  $E_1$ . Вследствие чего получим соотношения

$$R(t) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{b}{2} - \tau \right) D \left( \frac{b}{2} - \tau \right) d\tau = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{b}{2} - \tau \right) R(\tau) d\tau D \left( \frac{b}{2} - t \right), \quad (3.8.20)$$

$$P(t) \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{b}{2} - \tau \right) D \left( \frac{b}{2} - \tau \right) d\tau = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} P(\tau) d\tau \int_{-\frac{b}{2}}^t D \left( \frac{b}{2} - s \right) ds. \quad (3.8.21)$$

Из формул (3.8.4) и (3.8.5) следует, что  $R(t)$  является значением линейного интегрального оператора, действующего на функцию  $f(\tau)$ . Аналогично,  $P(t)$  линейно зависит от  $f(\tau)$ . Следовательно, через условие (A) обозначим следующее предложение: система линейных однородных интегральных уравнений (3.8.20) и (3.8.21) относительно  $f(t)$  имеет только нулевое решение.

Тогда следует справедливость утверждения теоремы 3.8.1.

Заметим, что при  $Q(x) \in W_2^k \left[ \frac{b}{2}, b \right]$ , но  $Q(x) \notin W_2^{k+1} \left[ \frac{b}{2}, b \right]$  при некотором  $k$  следует, что  $C = 0$ . Откуда из (3.8.19) следует  $R(t) \equiv 0$ . Следовательно, из соотношений (3.8.4), (3.8.5) получаем, что  $f(t) \equiv 0$ . Таким образом, в этом случае выполнение условия (A) обеспечено.

Теорема 3.8.1 доказана.

**Замечание 3.8.1.** Дефект неполноты системы корневых функций оператора  $L$  не превышает двух, то есть размерность ортогонального дополнения линейной оболочки корневых функций в  $L_2[0, b]$  не больше двух.

В качестве примера рассмотрим случай, когда

$$q(x) = a \text{ при } 0 \leq x < \frac{b}{2}, \quad q(x) = c \text{ при } \frac{b}{2} < x \leq b$$

$a, c$  – вещественные.

Поскольку

$$V_1\left(\frac{b}{2} - x, \lambda\right) = \cos \sqrt{\lambda - ax}, \quad V_1\left(\frac{b}{2} + x, \lambda\right) = \cos \sqrt{\lambda - cx},$$

$$V_2\left(\frac{b}{2} - x, \lambda\right) = -\frac{\sin \sqrt{\lambda - ax}}{\sqrt{\lambda - a}}, \quad V_2\left(\frac{b}{2} + x, \lambda\right) = \frac{\sin \sqrt{\lambda - cx}}{\sqrt{\lambda - c}},$$

то

$$F_1(\lambda) = \left| \int_0^{\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\lambda - ax} f\left(\frac{b}{2} - x\right) dx + \int_0^{\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\lambda - cx} f\left(\frac{b}{2} + x\right) dx \right.$$

$$\left. \begin{aligned} & \sqrt{\lambda - a} \sin \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} - \sqrt{\lambda - c} \sin \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} \\ & - \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda - ax}}{\sqrt{\lambda - a}} f\left(\frac{b}{2} - x\right) dx + \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda - cx}}{\sqrt{\lambda - c}} f\left(\frac{b}{2} + x\right) dx \right| = \\ & \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} + \cos \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} \end{aligned} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{b}{2}} f\left(\frac{b}{2} - x\right) \cos \sqrt{\lambda - a} \left(\frac{b}{2} - x\right) dx + \int_0^{\frac{b}{2}} f\left(\frac{b}{2} + x\right) \cos \sqrt{\lambda - c} \left(\frac{b}{2} - x\right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} f\left(\frac{b}{2} + x\right) \left( \cos\left(\sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} + \sqrt{\lambda - cx}\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} - \sqrt{\lambda - cx}\right) \right) dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} f\left(\frac{b}{2} + x\right) \left( \frac{\sqrt{\lambda - a}}{\sqrt{\lambda - c}} \left( \cos\left(\sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} - \sqrt{\lambda - cx}\right) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \cos\left(\sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} + \sqrt{\lambda - cx}\right) \right) \right) dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} f\left(\frac{b}{2} - x\right) \left( \frac{\sqrt{\lambda - c}}{\sqrt{\lambda - a}} \left( \cos\left(\sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} - \sqrt{\lambda - ax}\right) \right. \right.$$

$$\left. \left. - \cos\left(\sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} + \sqrt{\lambda - ax}\right) \right) \right) dx +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_0^{\frac{b}{2}} f\left(\frac{b}{2} - x\right) \left( \cos\left(\sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} - \sqrt{\lambda - ax}\right) + \cos\left(\sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} + \sqrt{\lambda - ax}\right) \right) dx.$$

В разделе 3.6 приведен характеристический определитель в виде

$$\Delta(\lambda) = (c - a) \frac{\sin \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2}}{\sqrt{\lambda - c}} \cdot \frac{\sin \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2}}{\sqrt{\lambda - a}}.$$

Из рассуждений при доказательстве теоремы 3.8.1 получаем, что  $F_k(\lambda) = C_k \Delta(\lambda)$  при всех  $\lambda_1$ , где  $C_k$  – некоторые числа.

$$\begin{cases} \left( \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} + \cos \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} \right) A - \left( \sqrt{\lambda - a} \sin \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} - \sqrt{\lambda - c} \sin \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} \right) B = \\ \left( \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} - \cos \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} \right) B + \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2}}{\sqrt{\lambda - a}} + \frac{\sin \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2}}{\sqrt{\lambda - c}} \right) A = C_2 \Delta(\lambda), \end{cases}$$

где

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\lambda - ax} f\left(\frac{b}{2} - x\right) dx + \int_0^{\frac{b}{2}} \cos \sqrt{\lambda - cx} f\left(\frac{b}{2} + x\right) dx, \\ B &= \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda - ax}}{\sqrt{\lambda - a}} f\left(\frac{b}{2} - x\right) dx + \int_0^{\frac{b}{2}} \frac{\sin \sqrt{\lambda - cx}}{\sqrt{\lambda - c}} f\left(\frac{b}{2} + x\right) dx, \end{aligned}$$

Отсюда найдем  $A$  и  $B$ , учитывая, что  $\Delta(\lambda)$  в некоторых точках отлична от нуля.

$$\begin{aligned} |A| &= \left| C_1 \left( \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} - \cos \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} \right) + C_2 \left( \sqrt{\lambda - a} \sin \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} - \sqrt{\lambda - c} \sin \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} \right) \right| \\ |B| &= \left| C_1 \left( \frac{\sin \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2}}{\sqrt{\lambda - a}} + \frac{\sin \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2}}{\sqrt{\lambda - c}} \right) - C_2 \left( \cos \sqrt{\lambda - a} \frac{b}{2} + \cos \sqrt{\lambda - c} \frac{b}{2} \right) \right| \end{aligned}$$

Поскольку,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |A| = 0$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} |B| = 0$ , где  $\alpha = \max\{\sqrt{\lambda - c}, \sqrt{\lambda - a}\}$ , то  $C_1 = C_2 = 0$ . Когда  $C_1, C_2$  нули, то из доказательства теоремы 3.8.1 следует, что  $f(t) = 0$  для почти всех  $t$  из  $[0, b]$ .

## 4 ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПО БИРКГОФУ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

### 4.1 Асимптотика собственных значений оператора двухкратного дифференцирования с регулярными по Биркгофу граничными условиями на графе-звезде

В данном разделе для оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде выделены невырожденные по В.А. Марченко и регулярные по Биркгофу краевые условия. Затем строится асимптотика собственных

значений оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде с регулярными по Биркгофу краевыми условиями и доказана полнота системы корневых функций рассматриваемого оператора в пространстве  $L_2(\mathfrak{Z})$ . Оператор с невырожденными граничными условиями может иметь неполную в  $L_2(\mathfrak{Z})$  систему корневых функций. В то же время оператор с регулярными по Биркгофу граничными условиями имеет полную в  $L_2(\mathfrak{Z})$  систему корневых функций. Приведены иллюстративные примеры.

Пусть  $m$  – фиксированное натуральное число.

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения для системы дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} -y''_{m+1}(x_{m+1}) = \rho^2 y_{m+1}(x_{m+1}), & 0 < x_{m+1} < 1, \\ -y''_m(x_m) = \rho^2 y_m(x_m), & 0 < x_m < 1, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ -y''_1(x_1) = \rho^2 y_1(x_1), & 0 < x_1 < 1 \end{cases} \quad (4.1.1)$$

с условиями вида (a)

$$\begin{aligned} y_{m+1}(1) &= y_1(0) = \dots = y_m(0), \\ y'_{m+1}(1) &= y'_1(0) + \dots + y'_m(0) \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

и условиями вида (b)

$$\begin{aligned} U_s(y_1, y_2, \dots, y_{m+1}) &= \\ \sum_{j=1}^2 &\left[ a_{sj} y_1^{(j-1)}(1) + a_{s(2+j)} y_2^{(j-1)}(1) + \dots + a_{s(2m-2+j)} y_m^{(j-1)}(1) + \right. \\ &\left. + a_{s(2m+j)} y_{m+1}^{(j-1)}(0) \right] = 0, \quad s = 1, \dots, m+1. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Матрицу из коэффициентов условий вида (b) обозначим через  $A$ ,

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,2m+1} & a_{1,2m+2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,2m+1} & a_{2,2m+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m+1,1} & a_{m+1,2} & \dots & a_{m+1,2m+1} & a_{m+1,2m+2} \end{pmatrix},$$

где  $a_{sp}$  – некоторые, быть может, комплексные числа. Считаем, что  $\text{rank } A = m+1$ .

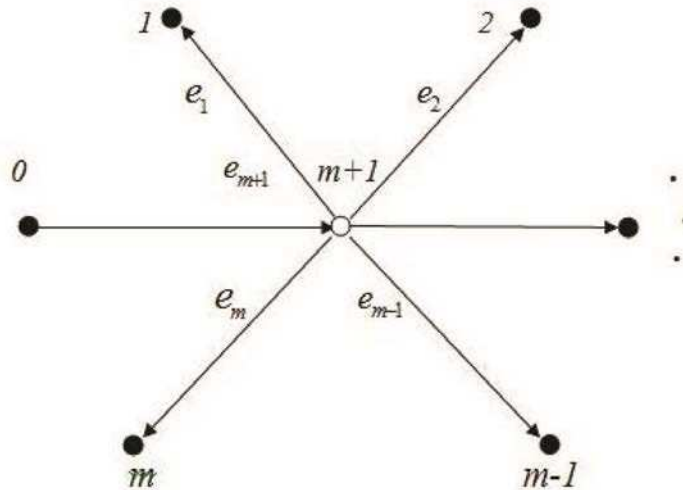
Согласно результатам работ [44], [45] задача (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) может быть интерпретирована, как задача на собственные значения оператора двухкратного дифференцирования на графе – звезде  $\mathfrak{Z} = \{\nu, \varepsilon\}$ .

Здесь  $\nu$  представляет множество вершин, занумерованных от 0 до  $m+1$ , а множество  $\varepsilon$  – означает множество дуг  $e_1, \dots, e_m$  [46]. На каждой дуге  $e_j$  выполняется одно из дифференциальных уравнений системы (4.1.1). Вершина  $m+1 \in \nu$  называется внутренней вершиной графа-звезды. Условия вида (a) означают, что во внутренней вершине выполняются законы Кирхгофа [47]. Вершины  $0, 1, \dots, m$  называются граничными вершинами графа-звезды (Рис 1).

Условия вида (b) представляют набор граничных условий. При  $m = 1$  задача (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) совпадает с задачей Штурма – Лиувилля

$$-u''(x) = \rho^2 u(x), \quad 0 < x < 2, \quad (4.1.4)$$

$$U_j(u) = \sum_{k=1}^2 a_{jk} u^{(k-1)}(0) + \sum_{k=1}^2 a_{j(k+2)} u^{(k-1)}(2), \quad j = 1, 2. \quad (4.1.5)$$



В этом случае матрица  $A$  примет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}. \quad (4.1.6)$$

Согласно монографии В.А. Марченко [7] условия (4.1.5) называются невырожденными граничными условиями, если выполнено одно из следующих требований:

- 1)  $A_{34} \neq 0$ ,
- 2)  $A_{34} = 0, \quad A_{14} + A_{23} \neq 0$ ,
- 3)  $A_{34} = 0, \quad A_{14} + A_{23} = 0, \quad A_{12} \neq 0$ .

Здесь  $A_{ij}$  означает минор матрицы (4.1.6), составленный из столбцов матрицы  $A$  с номерами  $i$  и  $j$ .

В первой части данного пункта определены невырожденные по В.А. Марченко граничные условия для оператора двухкратного дифференцирования на графе – звезде.

В монографии М.А. Наймарка [9] среди условий вида (4.1.5) выделены регулярные по Биркгофу краевые условия. В настоящем пункте для оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде выделены регулярные по Биркгофу краевые условия. Затем вычислена асимптотика собственных значений оператора двухкратного дифференцирования на графе-звезде с регулярными по Биркгофу краевыми условиями и доказана полнота системы корневых функций рассматриваемого оператора в пространстве  $L_2(\mathfrak{S})$ .

В настоящей работе варьируются только граничные условия типа (b). В работе М.Г. Завгороднего [48] изучены нормированные краевые условия для дифференциальных уравнений на графах, когда варьируются как условия типа (a), так и условия типа (b). В то же время в монографии Ю.В. Покорного [49] ставилась задача исследования дифференциальных операторов на графах, когда варьируются только условия в граничных вершинах. Так что данный раздел соответствует проблеме, поставленной в монографии [7].

#### 4.1.1 Зависимость решений системы дифференциальных уравнений (4.1.1) с условиями (4.1.2) от спектрального параметра.

В работе [44] доказано следующее утверждение.

**Утверждение 4.1.1.** Пусть  $y_{m+1}(x_{m+1}) = e^{i\rho x_{m+1}}$  при  $x_{m+1} \in e_{m+1}$ . Тогда решение системы (4.1.1) с условиями (4.1.2) определяется по формулам

$$y_s(x_s) = e^{i\rho(x_s+1)} - B_s i e^{i\rho} \sin \rho x_s, \quad x_s \in e_s, \quad s = 1, \dots, m, \quad (4.1.7)$$

причем постоянные  $B_1, B_2, \dots, B_m$  удовлетворяют соотношению

$$B_1 + B_2 + \dots + B_m = m - 1, \quad (4.1.8)$$

а в остальном – произвольные.

Утверждение остается справедливым, если  $\rho$  заменить на  $-\rho$ . При этом набор чисел  $B_1, B_2, \dots, B_m$  не меняется.

#### 4.1.2 Невырожденные по В.А. Марченко краевые условия вида (4.1.3)

В данном пункте положим  $m = 2$  и определим невырожденные по В.А. Марченко краевые условия.

Общее решение первого уравнения системы (4.1.1) имеет вид

$$y_3(x_3, \rho) = \alpha_1 \cos \rho x_3 + \alpha_2 \frac{\sin \rho x_3}{\rho}, \quad (4.1.9)$$

где  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  – произвольные величины, независимые от  $x_3$ .

Тогда согласно утверждению пункта 4.1.1 для функций  $y_1(x_1, \rho)$ ,  $y_2(x_2, \rho)$ , удовлетворяющих (4.1.1), (4.1.2), получим следующие представления:

$$\begin{cases} y_1(x_1, \rho) = \alpha_1 (\cos \rho(x_1 + 1) + \beta_1 \sin \rho \sin \rho x_1) + \\ \quad + \alpha_2 \left( \frac{\sin \rho(x_1+1)}{\rho} - \beta_1 \cos \rho \frac{\sin \rho x_1}{\rho} \right), \\ y_2(x_2, \rho) = \alpha_1 (\cos \rho(x_2 + 1) + \beta_2 \sin \rho \sin \rho x_2) + \\ \quad + \alpha_2 \left( \frac{\sin \rho(x_2+1)}{\rho} - \beta_2 \cos \rho \frac{\sin \rho x_2}{\rho} \right), \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Причем числа  $\beta_1$  и  $\beta_2$  удовлетворяют соотношению

$$\beta_1 + \beta_2 = 1.$$

Введем вектор  $\vec{T}(\rho)$ , определенный по формуле

$$\vec{T}(\rho) = \begin{bmatrix} t_1(1, \rho) \\ t_2(1, \rho) \\ t_3(0, \rho) \\ t'_1(1, \rho) \\ t'_2(1, \rho) \\ t'_3(0, \rho) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} t_1(x_1, \rho) &= \cos \rho(x_1 + 1) + \beta_1 \sin \rho \sin \rho x_1, \\ t_2(x_2, \rho) &= \cos \rho(x_2 + 1) + \beta_2 \sin \rho \sin \rho x_2, \\ t_3(x_3, \rho) &= \cos \rho x_3. \end{aligned}$$

Легко преобразовать вектор  $\vec{T}(\rho)$  к следующему виду:

$$\vec{T}(\rho) = \begin{bmatrix} \cos 2\rho \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ 1 \\ -\rho \sin 2\rho \\ -\frac{1}{2} \rho \sin 2\rho \\ 0 \end{bmatrix} + \beta_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ 0 \\ \frac{1}{2} \rho \sin 2\rho \\ -\frac{1}{2} \rho \sin 2\rho \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.1.11)$$

Здесь учтено, что  $\beta_2 = 1 - \beta_1$ . Удобно ввести обозначения

$$\vec{T}_0(\rho) = \begin{bmatrix} \cos 2\rho \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ 1 \\ -\rho \sin 2\rho \\ -\frac{1}{2} \rho \sin 2\rho \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{T}_1(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ 0 \\ \frac{1}{2} \rho \sin 2\rho \\ -\frac{1}{2} \rho \sin 2\rho \\ 0 \end{bmatrix}$$

Аналогично вектору  $\vec{T}(\rho)$  определим вектор  $\vec{R}(\rho)$  по формуле

$$\vec{R}(\rho) = \begin{bmatrix} \tau_1(1, \rho) \\ \tau_2(1, \rho) \\ \tau_3(0, \rho) \\ \tau'_1(1, \rho) \\ \tau'_2(1, \rho) \\ \tau'_3(0, \rho) \end{bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} \tau_1(x_1, \rho) &= \frac{\sin \rho(x_1 + 1)}{\rho} - \beta_1 \cos \rho \frac{\sin \rho x_1}{\rho}, \\ \tau_2(x_2, \rho) &= \frac{\sin \rho(x_2 + 1)}{\rho} - \beta_2 \cos \rho \frac{\sin \rho x_2}{\rho}, \end{aligned}$$



$$\tau_3(x_3, \rho) = \frac{\sin \rho x_3}{\rho}.$$

Векторы  $\vec{R}_0(\rho)$  и  $\vec{R}_1(\rho)$  определяются по аналогии с векторами  $\vec{T}_0(\rho)$  и  $\vec{T}_1(\rho)$ :

$$\vec{R}_0(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ \frac{1}{2} \frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ 0 \\ \cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \vec{R}_1(\rho) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ -\frac{1}{2} \frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Справедливо векторное равенство

$$\vec{R}(\rho) = \vec{R}_0(\rho) - \beta_1 \vec{R}_1(\rho). \quad (4.1.12)$$

Теперь подставим представления (4.1.9) и (4.1.10) в граничные условия (4.1.3). В результате получим следующую систему алгебраических уравнений, записанную в матрично-векторной форме:

$$\alpha_1 [A\vec{T}_0(\rho) + \beta_1 A\vec{T}_1(\rho)] + \alpha_2 [A\vec{R}_0(\rho) - \beta_1 A\vec{R}_1(\rho)] = 0. \quad (4.1.13)$$

Здесь  $A$  – заданная прямоугольная матрица размерности  $3 \times 6$ . Строки матрицы  $A$  удобно обозначать через  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ , где  $\vec{a}_i$  –  $i$ -ая строка. Из системы (4.1.13) исключим неизвестные  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . В результате получим систему двух уравнений

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \vec{T}_0(\rho) + \beta_1 \vec{a}_1 \vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_1 \vec{R}_0(\rho) - \beta_1 \vec{a}_1 \vec{R}_1(\rho) \\ \vec{a}_k \vec{T}_0(\rho) + \beta_1 \vec{a}_k \vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_k \vec{R}_0(\rho) - \beta_1 \vec{a}_k \vec{R}_1(\rho) \end{vmatrix} = 0, \quad k = 2, 3. \quad (4.1.14)$$

Из системы (4.1.14) надо исключить неизвестный параметр  $\beta_1$ . Для этого сначала перепишем (4.1.14) в следующем виде:

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_1 \vec{R}_0(\rho) \\ \vec{a}_k \vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_k \vec{R}_0(\rho) \end{vmatrix} + \beta_1 \left( \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_1 \vec{R}_0(\rho) \\ \vec{a}_k \vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_k \vec{R}_0(\rho) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_1 \vec{R}_1(\rho) \\ \vec{a}_k \vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_k \vec{R}_1(\rho) \end{vmatrix} \right) = 0 \quad (4.1.15)$$

где  $k = 2, 3$ . Здесь учтено, что определитель

$$\begin{vmatrix} \vec{a}_1 \vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_1 \vec{R}_1(\rho) \\ \vec{a}_k \vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_k \vec{R}_1(\rho) \end{vmatrix} = 0, \quad k = 2, 3,$$

так как  $\vec{T}_1(\rho) \cos \rho = \vec{R}_1(\rho) \rho \sin \rho$ .

Исключая из системы (4.1.15) величину  $\beta_1$ , получим равенство

$$\begin{vmatrix} \gamma_2 & \varepsilon_2 \\ \gamma_3 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (4.1.16)$$

где

$$\gamma_k = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_1 \vec{R}_0(\rho) \\ \vec{a}_k \vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_k \vec{R}_0(\rho) \end{vmatrix}, \quad k = 2, 3,$$

$$\varepsilon_k = \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_1 \vec{R}_0(\rho) \\ \vec{a}_k \vec{T}_1(\rho) & \vec{a}_k \vec{R}_0(\rho) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \vec{a}_1 \vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_1 \vec{R}_1(\rho) \\ \vec{a}_k \vec{T}_0(\rho) & \vec{a}_k \vec{R}_1(\rho) \end{vmatrix}, \quad k = 2, 3.$$

Первую часть равенства (4.1.16) обычно обозначают через  $\Delta(\rho)$  и называют характеристическим определителем задачи (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) при  $m = 2$ .

Так как

$$\gamma_k = \det \left\{ \begin{pmatrix} \vec{a}_1 \\ \vec{a}_k \end{pmatrix} (\vec{T}_0(\rho) | \vec{R}_0(\rho)) \right\}, \quad k = 2, 3,$$

представляет определитель произведения двух матриц, то вычислим его с помощью формулы Бине-Коши. Сначала рассмотрим матрицу размерности  $6 \times 2$ :

$$[\vec{T}_0(\rho) | \vec{R}_0(\rho)] = \begin{vmatrix} \cos 2\rho & \frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho & \frac{1 \sin 2\rho}{2 \rho} \\ 1 & 0 \\ -\rho \sin 2\rho & \cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} \rho \sin 2\rho & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и вычислим ее миноры размерности два:

$$m_{12} = -\frac{\sin 2\rho}{2\rho}, \quad m_{13} = -\frac{\sin 2\rho}{\rho}, \quad m_{14} = 1,$$

$$m_{15} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho, \quad m_{16} = \cos 2\rho, \quad m_{23} = -\frac{\sin 2\rho}{\rho},$$

$$\begin{aligned}
m_{24} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho, & m_{25} &= 0, & m_{26} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho, \\
m_{34} &= \cos 2\rho, & m_{35} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho, & m_{36} &= 1, \\
m_{45} &= \frac{1}{2} \rho \sin 2\rho, & m_{46} &= -\rho \sin 2\rho, & m_{56} &= -\frac{1}{2} \rho \sin 2\rho.
\end{aligned}$$

Следовательно, при  $k = 2, 3$  можно записать представление для  $\gamma_k$ :

$$\gamma_k = h_1^{(k)} \rho \sin 2\rho + h_2^{(k)} \cos 2\rho + h_3^{(k)} \frac{\sin 2\rho}{\rho} + h_4^{(k)}, \quad (4.1.17)$$

где

$$h_1^{(k)} = \frac{1}{2} A_{45}^{(k)} - A_{46}^{(k)} - \frac{1}{2} A_{56}^{(k)},$$

$$h_2^{(k)} = -\frac{1}{2} A_{15}^{(k)} + A_{16}^{(k)} + \frac{1}{2} A_{24}^{(k)} + \frac{1}{2} A_{26}^{(k)} + A_{34}^{(k)} + \frac{1}{2} A_{35}^{(k)},$$

$$h_3^{(k)} = -\frac{1}{2} A_{12}^{(k)} - A_{13}^{(k)} - \frac{1}{2} A_{23}^{(k)},$$

$$h_4^{(k)} = A_{14}^{(k)} + \frac{1}{2} A_{15}^{(k)} + \frac{1}{2} A_{24}^{(k)} + \frac{1}{2} A_{26}^{(k)} - \frac{1}{2} A_{35}^{(k)} + A_{36}^{(k)}.$$

Теперь вычислим  $\varepsilon_k$  при  $k = 2, 3$ . Для этого составим матрицу размерности  $6 \times 2$ :

$$[\vec{T}_1(\rho) | \vec{R}_0(\rho)] = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho & \frac{\sin 2\rho}{\rho} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho & \frac{1 \sin 2\rho}{2 \rho} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \rho \sin 2\rho & \cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} \rho \sin 2\rho & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

и вычислим все ее миноры второго порядка:

$$\begin{aligned}
\hat{m}_{12} &= \frac{3 \sin 2\rho}{4\rho} - \frac{3 \sin 4\rho}{8\rho}, & \hat{m}_{13} &= 0, & \hat{m}_{14} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho, \\
\hat{m}_{15} &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\rho - \frac{3}{8} \cos 4\rho, & \hat{m}_{16} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho, \\
\hat{m}_{23} &= 0, & \hat{m}_{24} &= \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\rho + \frac{3}{8} \cos 4\rho, \\
\hat{m}_{25} &= -\frac{1}{2} \cos 2\rho + \frac{1}{2}, & \hat{m}_{26} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho, & \hat{m}_{34} &= 0, \\
\hat{m}_{35} &= 0, & \hat{m}_{36} &= 0, & \hat{m}_{45} &= \frac{3}{8} \rho \sin 4\rho - \frac{1}{4} \rho \sin 2\rho, \\
\hat{m}_{46} &= \frac{1}{2} \rho \sin 2\rho, & \hat{m}_{56} &= -\frac{1}{2} \rho \sin 2\rho.
\end{aligned}$$

Составим матрицу размерности  $6 \times 2$ :

$$[\vec{T}_0(\rho) | \vec{R}_1(\rho)] = \begin{pmatrix} \cos 2\rho & \frac{1 \sin 2\rho}{2\rho} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho & -\frac{1 \sin 2\rho}{2\rho} \\ 1 & 0 \\ -\rho \sin 2\rho & \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ -\frac{1}{2} \rho \sin 2\rho & -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

и вычислим все ее миноры второго порядка:

$$\begin{aligned}
\check{m}_{12} &= -\frac{3 \sin 4\rho}{8\rho} - \frac{1 \sin 2\rho}{4\rho}, & \check{m}_{13} &= -\frac{1 \sin 2\rho}{2\rho}, \\
\check{m}_{14} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho, & \check{m}_{15} &= -\frac{1}{8} - \frac{1}{2} \cos 2\rho - \frac{3}{8} \cos 4\rho, \\
\check{m}_{16} &= 0, & \check{m}_{23} &= \frac{1 \sin 2\rho}{2\rho}, \\
\check{m}_{24} &= \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\rho + \frac{3}{8} \cos 4\rho, & \check{m}_{25} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \check{m}_{26} = 0, & \quad \check{m}_{34} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho, & \quad \check{m}_{35} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho, \\ \check{m}_{36} = 0, & \quad \check{m}_{45} = \frac{3}{4} \rho \sin 2\rho + \frac{3}{8} \rho \sin 4\rho, & \quad \check{m}_{46} = 0, \quad \check{m}_{56} = 0. \end{aligned}$$

Находим разности миноров  $\hat{m}_{ln}$  и  $\check{m}_{ln}$ :

$$\begin{aligned} \hat{m}_{12} - \check{m}_{12} &= \frac{\sin 2\rho}{\rho}, \\ \hat{m}_{13} - \check{m}_{13} &= \frac{1}{2} \frac{\sin 2\rho}{\rho}, \\ \hat{m}_{14} - \check{m}_{14} &= -1, \\ \hat{m}_{15} - \check{m}_{15} &= \cos 2\rho, \\ \hat{m}_{16} - \check{m}_{16} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho, \\ \hat{m}_{23} - \check{m}_{23} &= -\frac{1}{2} \frac{\sin 2\rho}{\rho}, \\ \hat{m}_{24} - \check{m}_{24} &= -\cos 2\rho, \\ \hat{m}_{25} - \check{m}_{25} &= 1, \\ \hat{m}_{26} - \check{m}_{26} &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho, \\ \hat{m}_{34} - \check{m}_{34} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\rho, \\ \hat{m}_{35} - \check{m}_{35} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\rho, \\ \hat{m}_{36} - \check{m}_{36} &= 0, \\ \hat{m}_{45} - \check{m}_{45} &= -\rho \sin 2\rho, \\ \hat{m}_{46} - \check{m}_{46} &= \frac{1}{2} \rho \sin 2\rho, \end{aligned}$$

$$\hat{m}_{56} - \check{m}_{56} = -\frac{1}{2}\rho \sin 2\rho.$$

Следовательно, при  $k = 2, 3$  можно записать окончательное представление для  $\varepsilon_k$ :

$$\varepsilon_k = g_1^{(k)} \rho \sin 2\rho + g_2^{(k)} \cos 2\rho + g_3^{(k)} \frac{\sin 2\rho}{\rho} + g_4^{(k)}, \quad (4.1.18)$$

где

$$g_1^{(k)} = -A_{45}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{46}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{56}^{(k)},$$

$$g_2^{(k)} = A_{15}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{16}^{(k)} - A_{24}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{26}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{34}^{(k)},$$

$$g_3^{(k)} = A_{12}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{13}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{23}^{(k)},$$

$$g_4^{(k)} = -A_{14}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{16}^{(k)} + A_{25}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{26}^{(k)} - \frac{1}{2}A_{34}^{(k)} + \frac{1}{2}A_{35}^{(k)}.$$

Теперь мы готовы вычислить  $\Delta(\rho)$ . Подставим в (4.1.16) соотношения (4.1.17) и (4.1.18) при  $k = 2, 3$ . Обозначим  $s_1(\rho) = \rho \sin 2\rho$ ,  $s_2(\rho) = \cos 2\rho$ ,  $s_3(\rho) = \frac{\sin 2\rho}{\rho}$ ,  $s_4(\rho) = 1$ . В результате получим

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} \gamma_2(\rho) & \varepsilon_2(\rho) \\ \gamma_3(\rho) & \varepsilon_3(\rho) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^4 h_k^{(2)} s_k(\rho) & \sum_{k=1}^4 g_k^{(2)} s_k(\rho) \\ \sum_{k=1}^4 h_k^{(3)} s_k(\rho) & \sum_{k=1}^4 g_k^{(3)} s_k(\rho) \end{vmatrix}$$

или

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) = f_1 \rho^2 \cos 4\rho + f_2 \rho \sin 4\rho + f_3 \cos 4\rho + \\ + f_4 \rho \sin 2\rho + f_5 \cos 2\rho + f_6 \frac{\sin 2\rho}{\rho} + f_7, \end{aligned} \quad (4.1.19)$$

где  $f_1, f_2, \dots, f_7$  выражаются через  $\{h_j^{(2)}, g_k^{(2)}, h_j^{(3)}, g_k^{(3)}, j = 1, \dots, 4, k = 1, \dots, 4\}$  в виде сумм определителей вида

$$\begin{vmatrix} h_j^{(2)} & g_k^{(2)} \\ h_j^{(3)} & g_k^{(3)} \end{vmatrix}.$$

**Утверждение 4.1.2.** Характеристический определитель  $\Delta(\rho)$  задачи на собственные значения (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) при  $m = 2$  имеет вид (4.1.19), где коэффициенты  $f_1, f_2, \dots, f_7$  выражаются через миноры второго порядка матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} & a_{26} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} & a_{36} \end{pmatrix}.$$

К примеру, приведем формулу для коэффициента  $f_1$ :

$$f_1 = -\frac{3}{16} \begin{vmatrix} A_{45}^{(2)} & A_{46}^{(2)} \\ A_{45}^{(3)} & A_{46}^{(3)} \end{vmatrix} + \frac{3}{16} \begin{vmatrix} A_{45}^{(2)} & A_{56}^{(2)} \\ A_{45}^{(3)} & A_{56}^{(3)} \end{vmatrix} + \frac{3}{16} \begin{vmatrix} A_{46}^{(2)} & A_{56}^{(2)} \\ A_{46}^{(3)} & A_{56}^{(3)} \end{vmatrix}.$$

Следуя В.А. Марченко введем определение.

**Определение 4.1.1.** Граничные условия (4.1.3) при  $m = 2$  называются вырожденными, если  $f_1 = \dots = f_6 = 0$ . В противном случае граничные условия (4.1.3) будем называть невырожденными.

**Пример 4.1.1.** Пусть  $m = 2$  и  $U_1(y_1, y_2, y_3) = y_1(1)$ ,  $U_2(y_1, y_2, y_3) = y_1'(1)$ ,  $U_3(y_1, y_2, y_3) = y_2(1)$ . В этом случае матрица  $A$  примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

причем все миноры второго порядка матриц  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  и  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  равны нулю, кроме  $A_{15}^{(2)} \neq 0$ ,  $A_{12}^{(3)} \neq 0$ .

В этом случае  $\Delta(\rho) = \frac{\sin \rho}{\rho}$ ,  $y_1(x_1, \rho) \equiv 0$ ,  $y_2(x_2, \rho) = \beta_2 \frac{\sin \rho(x_2+1)}{\rho}$ ,  $y_3(x_3, \rho) = \beta_2 \frac{\sin \rho x_3}{\rho}$ , где  $\beta_2$  – произвольная постоянная.

Рассматриваемые в данном примере граничные условия являются невырожденными. Заметим, что спектр задачи – дискретный,  $\{(n\pi)^2, n = 1, 2, \dots\}$ , система собственных функций  $\{y_1(x_1, n) \equiv 0, y_2(x_2, n) = (-1)^n \sin n\pi x_2, y_3(x_3, n) = \sin n\pi x_3, n = 1, 2, \dots\}$  не является полной системой в пространстве  $L_2(\mathfrak{X})$ . Рассматриваемая задача на собственные значения на графе-звезде в некотором смысле эквивалентна следующей задаче на собственные значения на отрезке  $[0, 2]$ :

$$-u''(x) = \rho^2 u(x), \quad 0 < x < 2, \quad u(1) = 0, \quad u(2) = 0. \quad (4.1.20)$$

Действительно, поскольку  $y_1(x_1, \rho) \equiv 0$ , то достаточно обозначить  $u(x, \rho) = y_3(x_3, \rho)$  при  $0 < x < 1$ ,  $u(x, \rho) = y_2(x_2 - 1, \rho)$  при  $1 < x < 2$ .

Задача (4.1.20) рассматривается на отрезке  $[0, 2]$ , а краевые условия заданы в точках  $x = 1$  и  $x = 2$ . Поэтому ее спектр дискретен, однако, система собственных функций не является полной в пространстве  $L_2(0, 2)$ .

**Пример 4.1.2.** Пусть  $m = 3$  и  $U_1(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1(1)$ ,  $U_2(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_1'(1)$ ,  $U_3(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_2(1)$ ,  $U_4(y_1, y_2, y_3, y_4) = y_2'(1)$ . В этом случае матрица  $A$  примет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В данном примере  $\Delta(\rho) \equiv 0$ ,  $y_1(x_1, \rho) \equiv 0$ ,  $y_2(x_2, \rho) \equiv 0$ . Также можно заметить, что  $y_3(0, \rho) = 0$ ,  $y_4(1, \rho) = 0$ . Следовательно, произвольное  $\lambda = \rho^2$  является собственным значением рассматриваемой задачи. Собственные функции, соответствующие  $\lambda = \rho^2$ , имеют вид  $(0, 0, \beta \sin \rho(x_3 + 1), \beta \sin \rho x_4)$ . Рассматриваемая задача на собственные значения на графе-звезде эквивалентна следующей задаче на собственные значения на отрезке  $[0, 2]$ :

$$-u''(x) = \rho^2 u(x), \quad 0 < x < 2, \quad u(1) = 0. \quad (4.1.21)$$

Действительно, поскольку  $y_1(x_1, \rho) \equiv y_2(x_2, \rho) \equiv 0$ , то достаточно положить  $u(x, \rho) = y_4(x_4, \rho)$  при  $0 < x < 1$ , и  $u(x, \rho) = y_3(x_3 - 1, \rho)$  при  $1 < x < 2$ .

**Замечание 4.1.1.** Изложение предыдущего материала проведено при  $m = 2$ . Предложенная схема распространяется на произвольное натуральное число  $m$ .

**Замечание 4.1.2.** Модифицируя пример 2, можно получить задачу на собственные значения на графе-звезде с пустым спектром.

**Пример 4.1.3.** Пусть  $m = 5$  и  $U_1(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_1(1)$ ,  $U_2(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_1'(1)$ ,  $U_3(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_2(1)$ ,  $U_4(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_2'(1)$ ,  $U_5(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_6(0)$ ,  $U_6(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6) = y_3(1)$ . Эта задача на собственные значения на графе-звезде эквивалентна задаче на собственные значения на отрезке:

$$-u''(x) = \rho^2 u(x), \quad 0 < x < 2, \quad u(0) = 0, \quad u(2) = 0, \quad u(1) = 0.$$

Понятно, что рассматриваемая задача на собственные значения на графе-звезде невырождена, поскольку спектр дискретен.



Слегка модифицируя пример 4.1.3, можно получить вырожденную задачу на собственные значения на графе-звезде, которая эквивалентна следующей задаче на собственные значения:

$$-u''(x) = \rho^2 u(x), \quad 0 < x < 2, \quad u(0) = 0, \quad u(\sqrt{2}) = 0, \quad u(2) = 0.$$

Спектр последней задачи – пустое множество. Следовательно, в этом случае характеристический определитель задачи на собственные значения на графе-звезде представляет постоянную функцию, то есть  $\Delta(\rho) \equiv \text{const}$ .

### 4.1.3 Регулярные по Биркгофу краевые условия вида (4.1.3).

В предыдущем пункте при  $m = 2$  дано представление характеристического определителя задачи (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3):

$$\begin{aligned} \Delta(\rho) = & f_1 \rho^2 \cos 4\rho + f_2 \rho \sin 4\rho + f_3 \cos 4\rho + \\ & + f_4 \rho \sin 2\rho + f_5 \cos 2\rho + f_6 \frac{\sin 2\rho}{\rho} + f_7, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $f_i$  зависят от миноров второго порядка матрицы  $A$ .

Следуя Биркгофу [9], дадим определение регулярных краевых условий.

**Определение 4.1.2.** Граничные условия (4.1.3) при  $m = 2$  называются регулярными по Биркгофу краевыми условиями, если выполняется хотя бы одно из следующих требований:

- 1)  $f_1 \neq 0$ ,
- 2)  $f_1 = 0, \quad f_2 \neq 0$ ,
- 3)  $f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 \neq 0$

**Пример 4.1.4.** Пусть  $m = 2$ ,  $U_1(y_1, y_2, y_3) = y_1(1)$ ,  $U_2(y_1, y_2, y_3) = y_0(1)$ ,  $U_3(y_1, y_2, y_3) = y_3(0)$ . В этом случае  $f_1 = \dots \neq 0$ , то есть рассматриваемые в этом примере граничные условия являются регулярными по Биркгофу.

В заключении приведу основной результат работы данного раздела, опубликованный в [51].

**Теорема 4.1.1.** Задача (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3) при  $m = 2$  с регулярными по Биркгофу краевыми условиями имеет полную систему корневых функций в пространстве  $L_2(\mathfrak{Z})$ , более того собственные значения задачи (4.1.1), (4.1.2), (4.1.3), занумерованные в порядке не убывания их модулей, удовлетворяют предельному соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{(n\pi)^2} = \frac{1}{16}.$$

Приведенная теорема доказывается по той же схеме, по которой доказана теорема 1.3.1 из монографии [7].

## 4.2 О вырожденных краевых задачах Штурма-Лиувилля на геометрических графах

Понятие вырожденных и невырожденных краевых задач для двухточечных граничных задач для линейных дифференциальных уравнений второго порядка на конечном отрезке ввел В.А. Марченко. Невырожденные краевые задачи на конечном отрезке согласно классификации Биркгофа делятся на регулярные и нерегулярные граничные условия. В данном пункте приведены примеры вырожденных и невырожденных краевых задач Штурма-Лиувилля с нерегулярными по Биркгофу граничными условиями на графе-звезде. Указанные примеры обобщают результаты работ В.А. Садовниченко и его соавторов, а также работы Б.Е. Кангужина с соавторами. Их примеры и результаты касались задачи на собственные значения Штурма-Лиувилля на графе-звезде с тремя дугами. Отметим также, что для оператора Штурма-Лиувилля с симметричными коэффициентами на конечном отрезке подобный эффект вырождения отмечен в работах М. Стоуна. В случае дифференциальных операторов высших порядков с симметричными коэффициентами на конечном отрезке эффект вырождения указан в работе В.А. Садовниченко и Б.Е. Кангужина. Эффект, когда одна и та же краевая задача Штурма-Лиувилля, в зависимости от свойств потенциала может иметь дискретный или непрерывный спектр был ранее отмечен в монографии Б.Е. Кангужина и М.А. Садыбекова. Там же изучены базисные свойства системы собственных и присоединенных функций в пространстве квадратично-суммируемых функций нерегулярных по Биркгофу краевых задач Штурма-Лиувилля на конечном отрезке.

**4.2.1. Вводные понятия.** Следующая система дифференциальных уравнений с гладкими коэффициентами

$$\begin{aligned}
 -U_{p+1}''(x_{p+1}) + q_{p+1}(x_{p+1})U_{p+1}(x_{p+1}) &= \lambda U_{p+1}(x_{p+1}), & 0 < x_{p+1} < l_{p+1} \\
 -U_p''(x_p) + q_p(x_p)U_p(x_m) &= \lambda U_p(x_p), & 0 < x_p < l_p \\
 -U_1''(x_1) + q_1(x_1)U_1(x_1) &= \lambda U_1(x_1), & 0 < x_1 < l_1
 \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

с условиями вида (а)

$$U_{p+1}(1) = U_1(0) = \dots = U_p(0), \quad U'_{p+1}(1) = U'_1(0) + \dots + U'_p(0) \quad (4.2.2)$$

с условиями вида (b)

$$W_s(U_1, \dots, U_{p+1}) = \sum_{j=1}^2 \left[ a_{sj} U_1^{(j-1)}(1) + a_{s(2+j)} U_2^{(j-1)}(1) + \dots + a_{s(2p-2-j)} U_p^{(j-1)}(1) + a_{s(2p+j)} U_{p+1}^{(j-1)}(0) \right] = 0, \quad s = 1, \dots, p+1. \quad (4.2.3)$$

может быть интерпретирована, как задача на собственные значения оператора Штурма-Лиувилля на геометрическом графе  $\mathfrak{Z}$ . Причем в качестве геометрического графа  $\mathfrak{Z} = \{V, E\}$  выступает граф-звезда. Множество  $V$  представляет множество вершин, занумерованных от 0 до  $p+1$ . Вершина  $(p+1)$  называется внутренней вершиной графа. Условия вида (a) означают, что во внутренней вершине выполняются законы Кирхгофа [47]. Вершины  $0, 1, \dots, p$  называются граничными вершинами. Условия вида (b) интерпретируются как граничные условия. Для полноты изложения приведем матрицу смежности [52] графа-звезды  $\mathfrak{Z} = \{V, E\}$ . Размерность матрицы смежности  $(p+2) \times (p+2)$  и она имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Множество  $E$  означает множество ориентированных дуг  $e_1, \dots, e_{p+1}$  графа  $\mathfrak{Z}$ . При  $i = 1, \dots, p$  дуга  $e_i$  направлена от вершины  $(p+1)$  к вершине  $i$ . В то же время направление дуги  $e_{p+1}$  выбрано от вершины 0 к вершине  $(p+1)$ . Длина дуги  $e_i$  считается равной  $l_i$ .

При  $p = 1$  задача (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) совпадает с задачей Штурма-Лиувилля на конечном отрезке. Подобные задачи подробно изучены в монографиях [7], [9]. Согласно результатам указанных в монографиях [7], [9] в случае достаточно гладких коэффициентов дифференциальных уравнений (4.2.1) при  $p = 1$  возможен один из следующих случаев либо существует не более счетного числа собственных значений, не имеющих конечных предельных точек, либо каждое комплексное число является собственным значением.

Больше того, первый случай разбивается на два альтернативных случая:

-собственные значения вообще отсутствуют (к примеру, задача Коши),

-собственных значений счетное число с единственной предельной точкой на бесконечности (к примеру, задача Дирихле).

Показано, что при  $p = 1$  нет таких задач на собственные значения, у которых есть собственные значения, но их только конечное число.

Случай  $p > 1$  мало изучен. В работе [51] при  $p = 2$  выделены так называемые невырожденные краевые задачи на собственные значения. В работе [53] при  $p = 2$  изучены возможные случаи, когда появляются вырожденные краевые условия. В частности, показано, что вырожденные краевые задачи невозможны, когда нет одинаковых по длине дуг [53].

При  $p = 1$  вырожденные краевые задачи для дифференциальных уравнений порядка выше два исследовались в работах [33, 54, 55, 56, 57, 58, 59]. Вопросы сходимости спектральных разложений вырожденных краевых задач Штурма-Лиувилля можно найти в монографии [60].

Здесь исследуется задача (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) при  $p > 1$  на предмет существования вырожденных задач. Приводятся конкретные примеры, иллюстрирующие те или иные возможные распределения собственных значений краевых задач (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3).

**4.2.2. Пример, когда спектр краевой задачи (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3) при произвольном  $p > 1$  заполняет всю комплексную плоскость.** Пусть  $p$  – фиксированное натуральное число, не равное единице. Пусть функции  $q_j \in L_2[0, l_j]$  при  $j = 1, 2, \dots, p + 1$ , где  $l_j$  – длина дуги  $e_j \in E$ . Предположим, что существует дуга  $e_s \in E$ ,  $1 \leq s \leq p$  такая, что

- 1)  $l_s = l_{p+1}$ ;
- 2)  $q_s(l_s - x) = q_{p+1}(x)$  в  $L_2(0, l_{p+1})$ .

В таком случае справедливо утверждение.

**Теорема 4.2.1.** Предположим, что условия (4.2.3) заменены на следующие граничные условия

$$\left\{ \begin{array}{l} U_{p+1}(0) + U_s(1) = \sum_{\substack{i \neq s \\ 1 \leq i \leq p}} (\alpha_i U_i(1) + \beta_i U'_i(1)), \\ U'_{p+1}(0) - U'_s(1) = \sum_{\substack{i \neq s \\ 1 \leq i \leq p}} (\gamma_i U_i(1) + \varepsilon_i U'_i(1)), \\ \sum_{\substack{i \neq s \\ 1 \leq i \leq p}} (a_{ij} U_i(1) + b_{ij} U'_i(1)) = 0, \quad j = 1, \dots, p - 1 \end{array} \right. \quad (4.2.4)$$

при произвольных числах  $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \varepsilon_i, a_{ij}, b_{ij}$ . Тогда произвольное комплексное число  $\lambda$  является собственным значением задачи (4.2.1), (4.2.2), (4.2.4).

**Доказательство.** Фиксируем произвольное комплексное число  $\lambda$ . Покажем, что однородная задача (4.2.1), (4.2.2), (4.2.4) имеет нетривиальное решение.

Пусть на всех дугах  $e_j \in E$ , кроме  $e_s$  и  $e_{p+1}$ , функций  $U_i(x, \lambda) \equiv 0$ . Теперь выберем  $U_s(x, \lambda)$  и  $U_{p+1}(x, \lambda)$  на дугах  $e_s$  и  $e_{p+1}$  соответственно. Из системы (4.2.1) вытекает, что

$$\begin{cases} -U_{p+1}''(x, \lambda) + q_{p+1}(x)U_{p+1}(x, \lambda) = \lambda U_{p+1}(x, \lambda), & 0 < x < l_{p+1} \\ -U_s''(x, \lambda) + q_s(x)U_s(x, \lambda) = \lambda U_s(x, \lambda). & 0 < x < l_{p+1} \end{cases} \quad (4.2.5)$$

Здесь учтено, что  $l_s = l_{p+1}$ .

В то же время условия (2) примут вид

$$\begin{cases} U_{p+1}(1, \lambda) = 0, & U_s(0, \lambda) = 0, \\ U_{p+1}'(1, \lambda) = U_s'(0, \lambda). \end{cases} \quad (4.2.6)$$

Введем функцию-потенциал по формуле

$$q(x) = \begin{cases} q_{p+1}(x) & \text{при } 0 \leq x \leq l_{p+1}, \\ q_s(x - l_{p+1}) & \text{при } l_{p+1} \leq x \leq 2l_{p+1}. \end{cases}$$

И рассмотрим дифференциальное уравнение на интервале

$$-V''(x, \lambda) + q(x)V(x, \lambda) = \lambda V(x, \lambda), \quad 0 < x < 2l_{p+1} \quad (4.2.7)$$

К уравнению (4.2.7) добавим условия Коши в точке  $x = l_{p+1}$ .

$$V(l_{p+1}, \lambda) = 0, \quad V'(l_{p+1}, \lambda) = 1. \quad (4.2.8)$$

Потенциал  $q(x)$  является симметричной функцией относительно точки  $x = l_{p+1}$ . Действительно, при  $0 < x < l_{p+1}$  верно равенство  $q(x) = q_{p+1}(x)$ , а при  $q(2l_{p+1} - x) = q_s(l_{p+1} - x)$ . По условию теоремы 1 вытекает  $q(x) = q(2l_{p+1} - x)$  в  $L_2(0, 2l_{p+1})$ .

Если  $q(x)$  симметрично относительно  $x = l_{p+1}$ , то решение задачи (4.2.7)-(4.2.8) антисимметрично относительно  $x = l_{p+1}$ , то есть

$$V(x, \lambda) = -V(2l_{p+1} - x, \lambda), \quad 0 < x < 2l_{p+1}. \quad (4.2.9)$$

Ясно, что  $V(x, \lambda)$  не может быть тривиальной на  $[0, 2l_{p+1}]$  функцией. Положим

$$\begin{aligned} U_{p+1}(x, \lambda) &= V(x, \lambda) \quad \text{при } 0 < x < l_{p+1} \\ U_s(x, \lambda) &= -V(2l_{p+1} - x, \lambda) \quad \text{при } l_{p+1} < x < 2l_{p+1} \end{aligned}$$

Таким образом определенные функции  $U_{p+1}(x, \lambda)$  и  $U_s(x, \lambda)$  представляют нетривиальные решения задачи (4.2.5), (4.2.6). С другой стороны, выполнение граничных условий (4.2.4) не вызывает сомнений, в силу свойства симметрии функции  $V(x, \lambda)$  на  $[0, 2l_{p+1}]$ . Теорема 4.2.1 полностью доказана.

**Замечание 4.2.1.** Теорема 4.2.1 остается в силе, если существует несколько дуг  $e_s$  со свойствами 1) и 2).

В следующем пункте указан пример краевой задачи (4.2.1), (4.2.2), (4.2.4), когда нарушение на дуге  $e_s$  условие 2) приводит к дискретности спектра.

**4.2.3. Пример невырожденной с нерегулярными по Биркгофу краевыми условиями задачи (4.2.1), (4.2.2), (4.2.3).** Напомним, что регулярность по Биркгофу граничных условий обычно не зависит от коэффициентов дифференциальной системы (4.2.1). То есть, если набор условий (4.2.3) регулярен по Биркгофу при одном наборе коэффициентов системы (4.2.1), то он остается регулярным и при всех других коэффициентах. В настоящем пункте покажем, что пример, приведенный в предыдущем пункте, соответствует невырожденной краевой задаче. То есть при некотором выборе коэффициентов системы  $q_i(x_i), i = 1, 2, \dots, p + 1$  спектр задачи (4.2.1), (4.2.2), (4.2.4) дискретен. Отсюда следует, что спектральные свойства краевой задачи (4.2.1), (4.2.2), (4.2.4) сильно меняются при переходе от одних коэффициентов системы (4.2.1) к другим. Как известно, краевые задачи с регулярными по Биркгофу граничными условиями обладают устойчивыми спектральными свойствами. Следовательно, краевая задача (4.2.1), (4.2.2), (4.2.4) представляет пример невырожденной (дискретность спектра) с нерегулярными по Биркгофу граничными условиями задачи на собственные значения. Пусть  $p$  – фиксированное натуральное число. Предполагаем, что  $q_j \in L_2[0, l_j]$  при  $j = 1, 2, \dots, p + 1$ , где  $l_j$  – длина дуги  $e_j \in E$ . Предположим, что существует дуга  $e_s \in E$  такая, что

$$1) l_s = l_{p+1}, s \leq p$$

$$2) q_{p+1}(x) \equiv 0, q_s(x) \equiv a \text{ для всех } x \in L_2(0, l_{p+1})$$

Здесь и далее  $a$  – фиксированное число. Предположим, что условия (4.2.3) заменены на следующие граничные условия:

$$\begin{cases} U_{p+1}(0) + U_s(l_s) = 0, & U'_{p+1}(0) - U'_s(l_s) = 0, \\ U_j(l_j) = 0, & j \neq s, \quad 1 \leq j \leq p. \end{cases} \quad (4.2.10)$$

**Теорема 4.2.2.** Краевая задача (4.2.1), (4.2.2), (4.2.10) имеет дискретный спектр при  $q_j \equiv 0, j \neq s$ .

**Доказательство** теоремы 4.2.2. Выпишем характеристический определитель краевой задачи (4.2.1), (4.2.2), (4.2.10). При  $j \neq s$  и  $j \neq p + 1$  решения  $U_j(x, \lambda)$  ищем в виде

$$U_j(x, \lambda) = A \frac{\sin \sqrt{\lambda}(l_j - x_j)}{\sin \sqrt{\lambda} l_j}.$$

Если  $j = s$ , то решение  $U_s(x, \lambda)$  ищем в виде

$$U_s(x, \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda - a} x_s + B_s \frac{\sin \sqrt{\lambda - a} x_s}{\sqrt{\lambda - a}}.$$

Если  $j = p + 1$ , то решение  $U_{p+1}(x, \lambda)$  ищем в виде

$$U_{p+1}(x, \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda}(l_{p+1} - x_{p+1}) - B_{p+1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}(l_{p+1} - x_{p+1})}{\sqrt{\lambda}}.$$

Причем

$$B_{p+1} = B_s - A \sqrt{\lambda} \sum_{\substack{j \neq s \\ 1 \leq j \leq p}} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} l_j.$$

Теперь из первых двух условий (4.2.10) получим систему двух уравнений относительно  $A$  и  $B_s$ .

$$\begin{aligned} & \left( \cos \sqrt{\lambda} l_{p+1} + \operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l_{p+1} \sum_{j \neq s} \operatorname{ctg} \sqrt{\lambda} l_j \right) A - \frac{\operatorname{tg} \sqrt{\lambda} l_{p+1}}{\sqrt{\lambda}} B_s + \\ & + A \cos \sqrt{\lambda - a} l_s + B_s \frac{\sin \sqrt{\lambda - a} l_s}{\sqrt{\lambda - a}} = 0 \\ & A \left( \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} l_{p+1}) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l_{p+1}) \sum_{j \neq s} \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l_j) \right) + B_s \cos(\sqrt{\lambda} l_{p+1}) \\ & + A \sqrt{\lambda - a} \sin(\sqrt{\lambda - a} l_s) - B_s \cos(\sqrt{\lambda - a} l_s) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, характеристический определитель  $\Delta(\lambda)$  имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos(\sqrt{\lambda} l_{p+1}) + \cos(h l_s) + \sin(\sqrt{\lambda} l_{p+1}) \sum_{j \neq s} \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l_j) & \frac{\sin(h l_s)}{h} - \frac{\sin(\sqrt{\lambda} l_{p+1})}{\sqrt{\lambda}} \\ \sqrt{\lambda} \sin(\sqrt{\lambda} l_{p+1}) + h \sin(h l_s) - \sqrt{\lambda} \cos(\sqrt{\lambda} l_{p+1}) \sum_{j \neq s} \operatorname{ctg}(\sqrt{\lambda} l_j) & \cos(\sqrt{\lambda} l_{p+1}) - \cos(h l_s) \end{vmatrix} \neq 0,$$

здесь  $h = \sqrt{\lambda - a}$ .

Отсюда следует утверждение теоремы. Заметим, что краевая задача (4.2.1), (4.2.2), (4.2.10) частный случай задачи (4.2.1), (4.2.2), (4.2.4). Следовательно, при  $a = 0$  и  $l_s = l_{p+1}$  спектр этой задачи заполняет всю комплексную плоскость. Тем самым получаем, что краевая задача (4.2.1), (4.2.2), (4.2.10) не является краевой задачей с регулярными по Биркгофу граничными условиями.

Другие примеры вырожденных, невырожденных краевых задач можно найти в работе [51]. Результаты изложенного пункта опубликованы в [61].



## 5 ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕРЕГУЛЯРНЫХ ПО БИРКГОФУ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

### 5.1 Полнота систем корневых функций дифференциальных операторов четвертого порядка с общими граничными условиями

Дифференциальные операторы с дискретным спектром являются важным источником систем корневых функций. При этом обратимые операторы порождают минимальные системы в соответствующих функциональных пространствах. Системы корневых функций самосопряженных операторов являются ортогональными полными системами. Однако, самосопряженные дифференциальные операторы – это довольно узкий класс операторов с полной системой корневых функций. В данном разделе диссертационной работы исследуется полнота корневых функций дифференциальных операторов четвертого порядка на отрезке с общими граничными условиями.

В функциональном пространстве  $L_2(0,1)$  рассмотрим дифференциальный оператор  $K$  задаваемый линейным дифференциальным выражением

$Ky \equiv y^{(4)}(x) + p_2(x)y^{(2)}(x) + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x), 0 < x < 1,$   
на области определения

$$y \in D(K) \equiv \{y \in W_2^4[0,1]: U_j(y) = 0, j = \overline{1,4}\}.$$

Здесь  $p_k(x)$  коэффициенты дифференциального выражения  $k$  раз непрерывно дифференцируемые на  $[0,1]$  функций. Граничные формы  $U_j(y)$  задаются следующим образом:

$$U_j(y) = \sum_{v=1}^4 \alpha_{jv} y^{(v-1)}(0) + \sum_{v=1}^4 \beta_{jv} y^{(v-1)}(1).$$

При этом числовые матрицы  $\alpha = (\alpha_{jv}), \beta = (\beta_{jv})$  имеют размерности  $4 \times 4$ , причем ранг матрицы граничных коэффициентов  $A \equiv (\alpha, \beta)$  равен 4.

Целью настоящей работы является исследование полноты системы корневых функций оператора  $K$  в функциональном пространстве  $L_2(0,1)$ .

Наиболее полные результаты в указанном направлении получены при  $n = 2$ . В работе [7] доказано полнота корневых функций в случае невырожденных граничных условий в смысле В.А. Марченко. Причем полнота корневых функций для невырожденных граничных условий в смысле В.А. Марченко не зависит от  $p_k(x)$  коэффициентов дифференциального выражения. В работе [8] выявлен случай, когда полнота системы корневых функций зависит не только от  $A$  матрицы граничных коэффициентов, но и от  $p_k(x)$  коэффициентов дифференциального выражения. С иных позиции подобные вопросы при  $n = 2$  изучены в работе [34].

При  $n > 2$  полнота системы корневых функций оператора  $K$  гарантируется в случае регулярных граничных условий в смысле Биркгофа [9].

Причем полнота корневых функций для регулярных граничных условий в смысле Бирхгофа не зависит от  $p_k(x)$  коэффициентов дифференциального выражения. Нас интересует вопрос: когда полнота системы корневых функций зависит не только от  $A$  матрицы граничных коэффициентов, но и от  $\{p_k(x)\}$  коэффициентов дифференциального выражения?

Сначала рассмотрим задачу на собственное значение с симметричными коэффициентами

$$y^{(4)}(x) + \sum_{k=0}^2 \hat{p}_k(x) y^{(k)}(x) = \lambda y(x), 0 < x < 1 \quad (5.1.1)$$

с граничными условиями

$$U_j(y) = \sum_{v=1}^4 \alpha_{jv} y^{(v-1)}(0) + \sum_{v=1}^4 \beta_{jv} y^{(v-1)}(1) = 0, j = \overline{1,4}. \quad (5.1.2)$$

Пусть дополнительно выполнено условия симметрии относительно середины отрезка  $[0,1]$

$$\hat{p}_k(x) = (-1)^k \hat{p}_k(1-x), x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]. \quad (5.1.3)$$

В этом случае существуют  $\{\hat{y}_1(x, \lambda), \hat{y}_2(x, \lambda)\}$  – два симметричных относительно  $x = \frac{1}{2}$  и  $\{\hat{y}_3(x, \lambda), \hat{y}_4(x, \lambda)\}$  – два антисимметричных решений, которые составляют систему фундаментальных решений, то есть

$$\begin{cases} \hat{y}_v(x, \lambda) = \hat{y}_v(1-x, \lambda), & v = 1, 2, \\ \hat{y}_v(x, \lambda) = -\hat{y}_v(1-x, \lambda), & v = 3, 4. \end{cases} \quad (5.1.4)$$

С учетом (5.1.4), запишем матрицу

$$M(\lambda) = \alpha [Y_c(0, \lambda) \quad Y_a(0, \lambda)] + \beta [Y_c(1, \lambda) \quad Y_a(1, \lambda)], \quad (5.1.5)$$

где

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{bmatrix}, \beta = \begin{bmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} & \beta_{14} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} & \beta_{24} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} & \beta_{34} \\ \beta_{41} & \beta_{42} & \beta_{43} & \beta_{44} \end{bmatrix},$$

$$[Y_c(x, \lambda) \quad Y_a(x, \lambda)] =$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{y}_1(x, \lambda) & \hat{y}_2(x, \lambda) & \hat{y}_3(x, \lambda) & \hat{y}_4(x, \lambda) \\ \hat{y}_1^{(1)}(x, \lambda) & \hat{y}_2^{(1)}(x, \lambda) & \hat{y}_3^{(1)}(x, \lambda) & \hat{y}_4^{(1)}(x, \lambda) \\ \hat{y}_1^{(2)}(x, \lambda) & \hat{y}_2^{(2)}(x, \lambda) & \hat{y}_3^{(2)}(x, \lambda) & \hat{y}_4^{(2)}(x, \lambda) \\ \hat{y}_1^{(3)}(x, \lambda) & \hat{y}_2^{(3)}(x, \lambda) & \hat{y}_3^{(3)}(x, \lambda) & \hat{y}_4^{(3)}(x, \lambda) \end{bmatrix}.$$

$Y_c(x, \lambda)$ ,  $Y_a(x, \lambda)$  означают матрицы, соответствующие симметричным и антисимметричным решениям, которые имеют размерности  $4 \times 2$ .

С учетом (5.1.4), при  $v = 1, 2$  перепишем

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_v(1, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(1)}(1, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(2)}(1, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(3)}(1, \lambda) \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \hat{y}_v(0, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(1)}(0, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(2)}(0, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(3)}(0, \lambda) \end{bmatrix}, \quad (5.1.6)$$

а при  $v = 3, 4$  имеем

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_v(1, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(1)}(1, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(2)}(1, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(3)}(1, \lambda) \end{bmatrix} = -J \begin{bmatrix} \hat{y}_v(0, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(1)}(0, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(2)}(0, \lambda) \\ \hat{y}_v^{(3)}(0, \lambda) \end{bmatrix}, \quad (5.1.7)$$

где  $J = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ . С учетом (5.1.6), (5.1.7) перепишем матрицу  $M(\lambda)$ :

$$M(\lambda) = \alpha[Y_c(0, \lambda) \quad Y_a(0, \lambda)] + \beta J[Y_c(0, \lambda) \quad -Y_a(0, \lambda)].$$

Упростим последнюю формулу

$$M(\lambda) = [(\alpha + \beta J)Y_c(0, \lambda) \quad (\alpha - \beta J)Y_a(0, \lambda)]. \quad (5.1.8)$$

Заметим, что

$$\det M(\lambda)B(\lambda) = \det M(\lambda) \det B(\lambda),$$

то есть  $\det B(\lambda) = \text{const}$  означает, что  $\det B(\lambda)$  не зависит от  $\lambda$ . Нам понадобится обратная матрица к матрице Вронского и обозначим ее через

$$\begin{bmatrix} \hat{y}_1(0, \lambda) & \hat{y}_2(0, \lambda) & \hat{y}_3(0, \lambda) & \hat{y}_4(0, \lambda) \\ \hat{y}_1^{(1)}(0, \lambda) & \hat{y}_2^{(1)}(0, \lambda) & \hat{y}_3^{(1)}(0, \lambda) & \hat{y}_4^{(1)}(0, \lambda) \\ \hat{y}_1^{(2)}(0, \lambda) & \hat{y}_2^{(2)}(0, \lambda) & \hat{y}_3^{(2)}(0, \lambda) & \hat{y}_4^{(2)}(0, \lambda) \\ \hat{y}_1^{(3)}(0, \lambda) & \hat{y}_2^{(3)}(0, \lambda) & \hat{y}_3^{(3)}(0, \lambda) & \hat{y}_4^{(3)}(0, \lambda) \end{bmatrix}^{-1} = B(\lambda).$$

Заметим, что  $\det B(\lambda) = 1$ , то есть не зависит от  $\lambda$  и существует единственная обратная матрица. Структура матрицы  $B(\lambda)$  имеет вид  $\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}$ , где матрицы  $Z_1, Z_2$  имеют размерности  $2 \times 4$ . Более детально элементы  $B(\lambda)$  будут представлены в следующем пункте. Вычислим

$$\begin{aligned} M(\lambda)B(\lambda) &= [(\alpha + \beta J)Y_c Z_1 + (\alpha - \beta J)Y_a Z_2] = \\ &= [\alpha(Y_c Z_1 + Y_a Z_2) + \beta J(Y_c Z_1 - Y_a Z_2)]. \end{aligned}$$

С одной стороны, известно, что

$$Y_c Z_1 + Y_a Z_2 = E.$$

Откуда

$$Y_c Z_1 = E - Y_a Z_2.$$

Тогда

$$M(\lambda)B(\lambda) = [\alpha + \beta(E - 2Y_a Z_2)J] = \alpha + \beta J - 2\beta J Y_a Z_2.$$

Обозначим через  $T := \beta J, R := \alpha + T$ . Вычислим

$$\det M(\lambda)B(\lambda) = \det (R - 2TY_a Z_2). \quad (5.1.9)$$

Заметим, что нули  $\det M(\lambda)B(\lambda)$  совпадают с  $\det M(\lambda)$ .

## 5.2 Некоторые вспомогательные утверждения

Обозначим через  $y_1(x), y_2(x), y_3(x), y_4(x)$  решения однородного уравнения

$$l(y) \equiv y^{(4)}(x) + p_2(x)y^{(2)}(x) + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x) = \lambda y(x), 0 < x < 1,$$

подчиненные начальным условиям Коши при  $x = \frac{1}{2}$ :

$$\begin{aligned} y_1\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 & y_2\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & y_3\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & y_4\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ y_1'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & y_2'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & y_3'\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 & y_4'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ y_1''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & y_2''\left(\frac{1}{2}\right) &= -1 & y_3''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & y_4''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ y_1'''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & y_2'''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & y_3'''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & y_4'''\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 \end{aligned}$$

при  $j = 1, 2, 3, 4$  примем обозначения

$$\vec{Y}_j(x) = \begin{bmatrix} y_j(x) \\ y_j'(x) \\ y_j''(x) \\ y_j'''(x) \end{bmatrix}.$$

Формально сопряженное дифференциальное выражение обозначим через

$$l^+(z) \equiv z^{(4)}(x) + \overline{p_2(x)}z^{(2)}(x) + (2p_2'(x) + p_1(x))z^{(1)}(x) + (p_2''(x) + p_1'(x) + p_0(x))z(x).$$

Через  $z(x)$  обозначим решение однородного сопряженного уравнения

$$l^+(z) = \bar{\lambda}z(x), \quad 0 < x < 1. \quad (5.2.1)$$

Введем также вектор

$$\vec{Z}(x) = \begin{bmatrix} z(x) \\ z'(x) \\ z^{(2)}(x) \\ z^{(3)}(x) \end{bmatrix}.$$

Напомним формулу Лагранжа при любом  $t \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} & \int_{\frac{1}{2}}^t l(y) \overline{z(x)} dx - \int_{\frac{1}{2}}^t y(x) \overline{l^+(z)} dx = \\ & \left[ y'''(x) \overline{z(x)} - y''(x) \overline{z'(x)} + y'(x) \overline{z''(x)} - y(x) \overline{z'''(x)} + \right. \\ & \left. + y'(x) p_2(x) \overline{z(x)} - y(x) p_2(x) \overline{z'(x)} - y(x) p_2'(x) \overline{z(x)} + y(x) p_1(x) \overline{z(x)} \right]_{x=\frac{1}{2}}^{x=t} = \\ & = \vec{Y}^T(x) Q(x) \vec{Z}(x) \Big|_{x=\frac{1}{2}}^{x=t}, \end{aligned}$$

где

$$Q(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) - p_2'(x) & -p_2(x) & 0 & -1 \\ p_2(x) & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Следовательно, при  $j = 1, 2, 3, 4$  верны равенства

$$\vec{Y}_j^T(t)Q(t)\vec{Z}(t) = \vec{Y}_j^T\left(\frac{1}{2}\right)Q\left(\frac{1}{2}\right)\vec{Z}\left(\frac{1}{2}\right). \quad (5.2.2)$$

Поэтому из соотношения (5.2.2) вытекает матрично-векторное равенство

$$Y^T(t)Q(t)\vec{Z}(t) = Y^T\left(\frac{1}{2}\right)Q\left(\frac{1}{2}\right)\vec{Z}\left(\frac{1}{2}\right), \quad \forall t \in [0,1], \quad (5.2.3)$$

где

$Y(t) = [\vec{Y}_1(t), \vec{Y}_2(t), \vec{Y}_3(t), \vec{Y}_4(t)]$  – матрица размерности  $4 \times 4$ .

Выберем четыре решения  $z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x)$  уравнения (5.2.1) такие, что

$$Y^T\left(\frac{1}{2}\right)Q\left(\frac{1}{2}\right)Z\left(\frac{1}{2}\right) = E,$$

где  $Z\left(\frac{1}{2}\right) = [\vec{Z}_1\left(\frac{1}{2}\right), \vec{Z}_2\left(\frac{1}{2}\right), \vec{Z}_3\left(\frac{1}{2}\right), \vec{Z}_4\left(\frac{1}{2}\right)]$  – матрица размерности  $4 \times 4$ .

Для этого должны выполняться следующие условия Коши в точке  $x = \frac{1}{2}$ :

$$Z\left(\frac{1}{2}\right) = Q^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)(Y^T)^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

или

$$Z\left(\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -a \\ -1 & a & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

где  $a = p_2\left(\frac{1}{2}\right)$ .

Таким образом,  $z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x)$  являются решениями однородного уравнения (5.2.1) с условиями Коши

$$\begin{aligned} z_1\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & z_2\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & z_3\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & z_4\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 \\ z_1'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & z_2'\left(\frac{1}{2}\right) &= -1 & z_3'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & z_4'\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ z_1''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & z_2''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & z_3''\left(\frac{1}{2}\right) &= 1 & z_4''\left(\frac{1}{2}\right) &= -a \\ z_1'''\left(\frac{1}{2}\right) &= -1 & z_2'''\left(\frac{1}{2}\right) &= a & z_3'''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 & z_4'''\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

**Лемма 5.2.1.** Справедливы следующие утверждения

- (i)  $z_1(x), z_2(x)$  – антисимметричные функции относительно  $x = \frac{1}{2}$ ,
- (ii)  $z_3(x), z_4(x)$  – симметричные функции относительно  $x = \frac{1}{2}$ .

Лемма 5.2.1 обосновывается точно также как получались формулы (5.1.4).

**Лемма 5.2.2.** Обратная матрица  $B(\lambda)$  к матрице Вронского  $Y(0)$  определяется по формуле

$$B(\lambda) = Z^T(0)Q^T(0). \quad (5.2.4)$$

Смысл леммы 5.2.2 заключается в том, что строки обратной матрицы  $B(\lambda)$  выражаются через фундаментальную систему решений сопряженного уравнения (5.2.1).

Нас интересует характеристический определитель

$$\hat{\Delta}(\lambda) = \det \left( M(\lambda)B(\lambda)(Q^T(0))^{-1} \right) = \det(R - 2TY_a Z_2), \quad (5.2.5)$$

где  $R$  и  $T$  – постоянные матрицы, а матрицы  $Y_a$  и  $B_2$  зависят от параметра  $\lambda$ . Матрица  $Y_a$  имеет размерность  $4 \times 2$ , в то же время матрица  $B_2$  имеет размерность  $2 \times 4$ . Отметим, что два столбца матрицы  $Y_a$  определяются антисимметричными решениями  $y_3(x)$ ,  $y_4(x)$  однородного уравнения (5.1.1). В то же время заметим, что две строки матрицы  $B_2$  определяются симметричными решениями  $z_3(x)$ ,  $z_4(x)$  сопряженного уравнения (5.2.1).

### 5.3 Вычисление характеристического определителя для дифференциальных уравнений с симметричными коэффициентами.

Пусть  $\lambda = \rho^4$  в характеристическом определителе краевой задачи (5.1.1), (5.1.2).

Введем функции

$$y_4(x, \lambda) = \frac{1}{2\rho^3} (\sinh \rho x - \sin \rho x), y_{4-k}(x, \lambda) = \frac{d^k}{dx^k} y_4(x, \lambda), k = 1, 2, 3.$$

Заметим, что функция  $y_4(x, \lambda)$  представляет целую функцию от  $\lambda$ , то есть радиус сходимости степенного ряда  $y_4(x, \lambda) = \sum_{j=0}^{\infty} C_j(x)\lambda^j$  равен бесконечности при любом  $x \in (0, 1)$ . Аналогичным свойством обладают функции  $y_1(x, \lambda)$ ,  $y_2(x, \lambda)$ ,  $y_3(x, \lambda)$ .

Известно [9], что нули с учетом их кратностей целой функции  $\Delta(\lambda)$ , определяемой по формуле

$$\Delta(\lambda) = \det(\alpha + \beta W(1, \lambda)),$$

однозначно задают собственные значения задачи (5.1.1), (5.1.2). Здесь  $W(1, \lambda)$  матрица Вронского при  $x = 1$ . Для произвольного  $x \in (0, 1)$  матрица Вронского задается соотношением

$$W(x, \lambda) = \begin{bmatrix} y_1(x, \lambda) & y_2(x, \lambda) & y_3(x, \lambda) & y_4(x, \lambda) \\ y_1'(x, \lambda) & y_2'(x, \lambda) & y_3'(x, \lambda) & y_4'(x, \lambda) \\ y_1''(x, \lambda) & y_2''(x, \lambda) & y_3''(x, \lambda) & y_4''(x, \lambda) \\ y_1'''(x, \lambda) & y_2'''(x, \lambda) & y_3'''(x, \lambda) & y_4'''(x, \lambda) \end{bmatrix}.$$

Заметим, что  $W(0, \lambda) = E$  – единичная матрица. Напомним [9], что для любых двух решений  $Z(x, \lambda)$  и  $y(x, \lambda)$  уравнения (5.1.1) справедливо тождество Лагранжа

$$0 = \int_0^1 \left( y^{(4)}(x)Z(x) - y(x)Z^{(4)}(x) \right) dx = Y^T(1) \cdot J \cdot Z(1) - Y^T(0) \cdot J \cdot Z(0)$$

или

$$Y^T(1) \cdot J \cdot Z(1) = Y^T(0) \cdot J \cdot Z(0), \quad (5.3.1)$$

где

$$Y^T(X) = (y(x, \lambda), y'(x, \lambda), y''(x, \lambda), y'''(x, \lambda)),$$

$$Z^T(X) = (z(x, \lambda), z'(x, \lambda), z''(x, \lambda), z'''(x, \lambda)),$$

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Пусть  $z_1(x, \lambda), z_2(x, \lambda), z_3(x, \lambda), z_4(x, \lambda)$  – некоторая фундаментальная система решений уравнения (5.1.1). Матрицу Вронского соответствующая фундаментальной системе решений обозначим через  $\tilde{W}(x, \lambda)$ . Тогда из соотношения (5.3.1) вытекает матричное равенство

$$W^T(1, \lambda) \cdot J \cdot \tilde{W}(1, \lambda) = J \cdot \tilde{W}(0, \lambda) \quad (5.3.2)$$

Выберем фундаментальную систему  $z_1(x, \lambda), z_2(x, \lambda), z_3(x, \lambda), z_4(x, \lambda)$  так чтобы

$$J\tilde{W}(0, \lambda) = E \text{ или } \tilde{W}(0, \lambda) = J^{-1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} z_1(x, \lambda) &= -y_4(x, \lambda), z_2(x, \lambda) = y_3(x, \lambda), \\ z_3(x, \lambda) &= -y_2(x, \lambda), z_4(x, \lambda) = y_1(x, \lambda). \end{aligned}$$

Следовательно, из матричного равенства (5.3.2) следует, что

$$(W(1, \lambda))^{-1} = \tilde{W}^T(1, \lambda) \cdot J^T = \begin{bmatrix} y_4'''(1, \lambda) & -y_4''(1, \lambda) & y_4'(1, \lambda) & -y_4(1, \lambda) \\ -y_3'''(1, \lambda) & y_3''(1, \lambda) & -y_3'(1, \lambda) & y_3(1, \lambda) \\ y_2'''(1, \lambda) & -y_2''(1, \lambda) & y_2'(1, \lambda) & -y_2(1, \lambda) \\ -y_1'''(1, \lambda) & y_1''(1, \lambda) & -y_1'(1, \lambda) & y_1(1, \lambda) \end{bmatrix}$$

Поскольку  $\det W(1, \lambda) = 1$ , то элементы обратной матрицы  $(W(1, \lambda))^{-1}$  совпадают с соответствующими алгебраическими дополнениями элементов матрицы  $W(1, \lambda)$ . Отсюда вытекают следующие соотношения для миноров третьего порядка:

$$W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = y_4'''(1, \lambda), \quad W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = y_3'''(1, \lambda),$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = y_4''(1, \lambda), \quad W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = y_3''(1, \lambda),$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = y_4'(1, \lambda), \quad W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = y_3'(1, \lambda),$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = y_4(1, \lambda), \quad W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = y_3(1, \lambda),$$

$$W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = y_2'''(1, \lambda), \quad W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = y_1'''(1, \lambda),$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = y_2''(1, \lambda), \quad W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = y_1''(1, \lambda),$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = y_2'(1, \lambda), \quad W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = y_1'(1, \lambda),$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = y_2(1, \lambda), \quad W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = y_1(1, \lambda),$$

Здесь  $W \begin{pmatrix} s & m & n \\ i & j & k \end{pmatrix}$  – минор матрицы Вронского  $W(1, \lambda)$  соответствующий пересечениям столбцов с номерами  $1 \leq i \leq j \leq k \leq 4$  со строками имеющий номера  $1 \leq s \leq m \leq n \leq 4$ .

Нам также понадобятся миноры второго порядка матрицы Вронского  $W(1, \lambda)$ .

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{4} \{2 + \cos(1+i)\rho + \cos(1-i)\rho\},$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \\ = \frac{\rho}{4} \{-(1+i)\sin(1+i)\rho - (1-i)\sin(1-i)\rho\},$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \\ = \frac{i\rho^2}{4} \{\cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho\}$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{4\rho} \{(1-i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho\}$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \\ = \frac{\rho}{4} \{-(1+i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho\}$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ = -\frac{i}{4\rho^2} \{\cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho\}$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \{\cos(1+i)\rho + \cos(1-i)\rho\},$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \{-2 + \cos(1+i)\rho + \cos(1-i)\rho\},$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\rho^3} \{(1+i)\sin(1+i)\rho + (1-i)\sin(1-i)\rho\},$$

$$W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{\rho^4}{4} (2 - \cos(1+i)\rho - \cos(1-i)\rho),$$

$$W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\rho^4} \{2 - \cos(1+i)\rho - \cos(1-i)\rho\},$$

$$W \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{\rho^3}{4} \{-(1-i)\sin(1+i)\rho - (1+i)\sin(1-i)\rho\}.$$

Теперь перейдем к выполнению характеристического определителя  $\Delta(\lambda) = \det(\alpha + \beta W(1, \lambda))$ . Столбцы матрицы  $\alpha$  будем обозначать через  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ , то есть

$$\alpha = (\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4).$$

Столбцы матрицы  $\beta W(1, \lambda)$  будем обозначать через  $\beta Y_1, \beta Y_2, \beta Y_3, \beta Y_4$ , то есть



$$\beta W(1, \lambda) = (\beta Y_1 \beta Y_2 \beta Y_3 \beta Y_4)$$

где  $Y_k = Y_k(1, \lambda) = (y_k(1, \lambda), y'_k(1, \lambda), y''_k(1, \lambda), y'''_k(1, \lambda))^T$ .

Тогда определитель суммы двух матриц вычисляется по формуле

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) = & \det \alpha + \det(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta Y_4) + \det(\alpha_1 \alpha_2 \beta Y_3 \alpha_4) + \det(\alpha_1 \beta Y_2 \alpha_3 \alpha_4) + \\ & + \det(\beta Y_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) + \det(\alpha_1 \alpha_2 \beta Y_3 \beta Y_4) + \det(\alpha_1 \beta Y_2 \alpha_3 \beta Y_4) + \\ & + \det(\beta Y_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta Y_4) + \det(\alpha_1 \beta Y_2 \beta Y_3 \alpha_4) + \det(\beta Y_1 \alpha_2 \beta Y_3 \alpha_4) + \\ & + \det(\beta Y_1 \beta Y_2 \alpha_3 \alpha_4) + \det(\beta Y_1 \beta Y_2 \beta Y_3 \alpha_4) + \det(\beta Y_1 \beta Y_2 \alpha_3 \beta Y_4) + \\ & + \det(\beta Y_1 \alpha_2 \beta Y_3 \beta Y_4) + \det(\alpha_1 \beta Y_2 \beta Y_3 \beta Y_4) + \det \beta. \end{aligned}$$

При вычислении  $\det(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta Y_4)$  применим формулу Бине–Коши

$$\begin{aligned} \det(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \beta Y_4) = & \\ = & -\beta_1 Y_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta_2 Y_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \beta_3 Y_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ & + \beta_4 Y_4 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \\ = & \left\{ -\beta_1 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \beta_3 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \beta_4 \right. \\ & \left. \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} Y_4. \end{aligned}$$

Здесь строки матрицы  $\beta$  обозначены через  $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4$ , то есть  $\beta^T = (\beta_1^T, \beta_2^T, \beta_3^T, \beta_4^T)$ .

Точно также вычисляются

$$\begin{aligned} \det(\alpha_1 \alpha_2 \beta Y_3 \alpha_4) = & \\ = & \left\{ \beta_1 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \beta_2 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \beta_4 \right. \\ & \left. \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} Y_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(\alpha_1 \beta Y_2 \alpha_3 \alpha_4) = & \\ = & \left\{ -\beta_1 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta_2 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_3 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta_4 \right. \\ & \left. \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} Y_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det(\beta Y_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4) = & \\ = & \left\{ \beta_1 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_2 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta_3 \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_4 \right. \\ & \left. \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} Y_1. \end{aligned}$$

При вычислении  $\det(\beta Y_1 \beta Y_2 \beta Y_3 \alpha_4)$  сначала применяем теорему Лапласа о разложении по столбцу и затем используем формулу Бине–Коши



$$\begin{aligned}
\det(\beta Y_1 \ \alpha_2 \ \beta Y_3 \ \beta Y_4) &= -\alpha_{21} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_1 \ Y_3 \ Y_4) \right\} + \alpha_{22} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_1 \ Y_3 \ Y_4) \right\} - \\
&- \alpha_{23} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_1 \ Y_3 \ Y_4) \right\} + \alpha_{24} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} (Y_1 \ Y_3 \ Y_4) \right\} = \\
&= W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -\alpha_{21} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{23} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{24} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -\alpha_{21} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{23} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{24} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -\alpha_{21} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{23} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{24} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ -\alpha_{21} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_{22} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha_{23} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_{24} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}. \\
\det(\alpha_1 \ \beta Y_2 \ \beta Y_3 \ \beta Y_4) &= \alpha_{11} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_2 \ Y_3 \ Y_4) \right\} - \alpha_{12} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_2 \ Y_3 \ Y_4) \right\} + \\
&+ \alpha_{13} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_4 \end{pmatrix} (Y_2 \ Y_3 \ Y_4) \right\} - \alpha_{14} \det \left\{ \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{pmatrix} (Y_2 \ Y_3 \ Y_4) \right\} = \\
&= W \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_{11} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{12} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{14} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_{11} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{12} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{14} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_{11} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{12} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{14} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
&+ W \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \left\{ \alpha_{11} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha_{12} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha_{13} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha_{14} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \right\}.
\end{aligned}$$

При вычислении  $\det(\alpha_1 \alpha_2 \beta Y_3 \beta Y_4)$  сначала применяется теорема Лапласа о разложении по двум столбцам и затем используется формула Бине–Коши.























$$\begin{aligned}
& \frac{\rho}{4} \{-(1+i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho\} \left[ \left\{ -\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \right. \\
& - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \left. \right\} + \\
& + \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \right. \\
& + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \left. \right\} + \\
& + \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \right. \\
& + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \left. \right\} + \\
& + \left\{ -\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \right. \\
& - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \left. \right\} \\
& W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -\frac{i}{4\rho^2} \{ \cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho \}
\end{aligned}$$







$$\begin{aligned}
W \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= W \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{\rho}{4} \{-(1+i)\sin(1+i)\rho - (1-i)\sin(1-i)\rho\} \\
&\frac{\rho}{4} \{-(1+i)\sin(1+i)\rho \\
&\quad - (1-i)\sin(1-i)\rho\} \left[ \left\{ -\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \right\} + \\
&\quad + \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \right. \\
&\quad \left. + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$

Таким образом, общее представление характеристического определителя для дифференциального оператора четвертого порядка выражается в следующей теореме.

**ТЕОРЕМА 5.3.1.** Пусть функции  $p_2, p_1, p_0$  гладкие и определены на отрезке  $[0,1]$ , а  $\alpha$  и  $\beta$  числовые матрицы размерности  $4 \times 4$ . Тогда для оператора

$$Ky \equiv y^{(4)}(x) + p_2(x)y^{(2)}(x) + p_1(x)y^{(1)}(x) + p_0(x)y(x), \quad 0 < x < 1$$

с областью определения

$$U_j(y) = \sum_{v=1}^4 \alpha_{jv} y^{(v-1)}(0) + \sum_{v=1}^4 \beta_{jv} y^{(v-1)}(1) = 0, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

его характеристический определитель выражается следующим равенством

$$\begin{aligned}
\Delta(\lambda) &= R_0 + R_1 y_1(1, \lambda) + R_2 y_2(1, \lambda) + R_3 y_3(1, \lambda) + R_4 y_4(1, \lambda) + R_5 \lambda y_2(1, \lambda) + R_6 \lambda y_3(1, \lambda) + \\
&\quad + R_7 \lambda y_4(1, \lambda) + R_8 \frac{1}{4} \{ \cos(1+i)\rho + \cos(1-i)\rho \} + \\
&\quad + R_9 \frac{i\rho^2}{4} \{ \cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho \} + R_{10} \frac{1}{4\rho} \{ (1-i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho \} + \\
&\quad + R_{11} \frac{\rho}{4} \{ -(1+i)\sin(1+i)\rho + (1+i)\sin(1-i)\rho \} + R_{12} \left\{ -\frac{i}{4\rho^2} \{ \cos(1-i)\rho - \cos(1+i)\rho \} \right\} + \\
&\quad + R_{13} \frac{1}{4\rho^3} \{ (1+i)\sin(1+i)\rho + (1-i)\sin(1-i)\rho \} + R_{14} \frac{\rho^4}{4} (2 - \cos(1+i)\rho - \cos(1-i)\rho) + \\
&\quad + R_{15} \frac{1}{4\rho^4} \{ 2 - \cos(1+i)\rho - \cos(1-i)\rho \} + R_{16} \frac{\rho^3}{4} \{ -(1-i)\sin(1+i)\rho - (1+i)\sin(1-i)\rho \} + \\
&\quad + R_{17} \frac{\rho}{4} \{ -(1+i)\sin(1+i)\rho - (1-i)\sin(1-i)\rho \}.
\end{aligned}$$

Все коэффициенты  $R$  с индексами выражаются через миноры матриц граничных значений. Конкретные формулы их приведены в приложении.

Получены аналоги вырожденных и невырожденных краевых условий для дифференциальных операторов четвертого порядка, представленные следующей теоремой.

**ТЕОРЕМА 5.3.2.** Если  $R_{14}$  не равно нулю, тогда соответствующая система корневых функций полна в функциональном пространстве  $L_2(0,1)$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе доказано, что в случае дифференциальных операторов первого порядка на отрезке, полнота системы экспонент зависит от соотношения между длинами отрезка и индикаторной диаграммой характеристического определителя; выяснено, что полнота системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка с вырожденными краевыми условиями зависит от соотношения между длиной носителя меры антисимметрии потенциала и длиной исходного отрезка; найдены достаточные условия полноты системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора четвертого порядка; выделен класс дифференциальных операторов на граф – звезде с полной системой собственных и присоединенных функций.

В результате исследования были получены следующие основные выводы:

1. Разработаны методы спектрального анализа адаптированных для нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков.
2. Исследованы свойства полноты нерегулярных по Биркгофу краевых задач высших порядков.
3. Доказаны существования собственных значений и собственных функций для нерегулярных по Биркгофу краевых задач на граф-звезде.
4. Расширены теоретические знания о дифференциальных операторах на отрезке и графах.
5. Созданы методы обоснования полноты системы корневых функций нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков, что может иметь практическое значение в строительной механике.

Рекомендации по практическому применению полученных результатов включают следующие меры:

1. Разработка и реализация программного обеспечения для численного анализа нерегулярных по Биркгофу краевых задач дифференциальных уравнений высших порядков.
2. Проведение экспериментальных исследований на реальных примерах задач, связанных с решением дифференциальных уравнений высших порядков, с целью подтверждения полученных теоретических результатов и оценки эффективности разработанных методов.
3. Применение полученных результатов в практических задачах, связанных с разработкой новых технологий и устройств, требующих решения дифференциальных уравнений высших порядков.
4. Использование результатов исследования в образовательном процессе для обучения студентов и аспирантов методам решения дифференциальных уравнений высших порядков и спектральному анализу.

Таким образом, в данной диссертационной работе были определены условия полноты экспоненциальной системы на отрезке вещественной оси; расширен класс дифференциальных операторов второго порядка, которые обладают полной системой корневых функций; выведены формулы вычисления коэффициентов характеристического определителя в случае вырожденных краевых задач; выписано общее представление характеристического определителя для дифференциального оператора четвертого порядка; описаны всевозможные условия вырожденности и невырожденности граничных условий для операторов четвертого порядка.





$$R_7 = \left\{ -\alpha_{41} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{42} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha_{43} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha_{44} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} +$$

$$+ \left\{ \beta_{14} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_{24} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} + \beta_{34} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} - \beta_{44} \cdot \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \right\}$$









$$\begin{aligned}
R_{11} = & \left[ \left\{ -\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + -\alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \right. \\
& \left. -\alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
& + \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
& + \left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \right. \\
& \left. + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right\} + \\
& + \left\{ -\alpha \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \right. \\
& \left. -\alpha \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} - \alpha \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \right\}
\end{aligned}$$







## Список использованных источников

1. Винер Н., Пэли Р. Преобразование Фурье в комплексной плоскости. М.: Наука, 1964, 268 с.
2. Ильинский А.С., Шестопапов Ю.В. Применение методов спектральной теории в задачах распространения волн. М.: Изд-во МГУ, 1989.
3. Смирнов ЮТ. Метод операторных пучков в краевых задачах сопряжения для системы эллиптических уравнений // Дифференц. ур-ния. 1991. Т. 27. № 1. 140-147 с.
4. Краснушкин П.Е., Моисеев ЕМ. О возбуждении вынужденных колебаний в слоистом радиоволноводе // Докл. АН СССР. 1982. Т. 264. № 5. 1123-1127 с.
5. Ильинский А.С, Слепян Г.Я. Колебания и волны в электродинамических системах с потерями. М.: Изд-во МГУ, 1973.
6. Levinson N., "Gap and density Theorems," Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 26, New York, 1940.
7. Марченко В.А, Уравнения Штурма-Лиувилля и их приложения, Наукова думка, Киев, 1977, с 330.
8. Маламуд М. М. О полноте системы корневых векторов оператора Штурма–Лиувилля с общими граничными условиями //Функц. анализ и его прил., 2008, том 42, выпуск 3, с. 45–52.
9. Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, Наука, М., 1969.
10. Кангужин Б.Е., Нурахметов Д.Б., Токмагамбетов Н.Е. Аппроксимативные свойства систем корневых функций, порождаемые корректно разрешимыми краевыми задачами для обыкновенных дифференциальных уравнений высших порядков. *Уфимск. матем. журн.*, 3:3 (2011), с. 80–92.
11. Levinson N. On nonharmonic Fourier series, *Ann. of Math.* 37, 1936, p.919-936.
12. Levinson N., On the closure of  $\{e^{i\lambda_n x}\}$  and integral functions, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* 31, 1935, p. 335—346.
13. Beurling A. and Malliavin P. On the closure of characters and the zeros of entire functions, *Acta Math.* 118 (1967), p.79-93.
14. Szasz P. Uber die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Aggregate von Potenzen, *Math. Anna.* 77 (1916), p. 482-496.
15. Schwartz L. Approximation d'une fonction quelconque par des sommes d'exponentielles imaginaires, *Ann. Fac. Sci. Toulouse* (1943), p.111-176.
16. Levin B. J. Distribution of zeros of entire functions, *Amer. Math. Soc. Translations* 5 (1964), (Moscow edition 1956).
17. Redheffer R. M. Graduate and faculty seminar, UCLA, Spring 1961.
18. Levinson N. On the closure of  $\{e^{i\lambda_n x}\}$ , *Duke Math. J.* 2 (1936), 511-516.

19. Redheffer R. M. On a theorem of Plancherel and Polya, *Pacific J. Math.* 3 (1953), 823-835.
20. Paley R. and Wiener N. *Fourier transforms in the complex domain*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., 19, New York, 1934.
21. Alexander W. O. Jr. and R. M. Redheffer, The excess of sets of complex exponentials, *Duke Math. J.* 34 (1967), p. 59-72.
22. Peterson D. R. The excess of sets of complex exponentials, *Proc. Amer. Math. Soc.* 44 (1974), p. 321-325.
23. Koosis P. Sur la totalite des systemes de d'exponentielles imaginaires, *C. R. Acad. Sci.* 250 (1960), p. 2102-2103.
24. Хабибуллин Б. Н. Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции, *Матем. сб.*, 2009, том 200, № 2, с. 129-158. DOI: <https://doi.org/10.4213/sm3885>.
25. Красичков-Терновский И.Ф. Интерпретация теоремы Берлинга-Маллявена о радиусе полноты. // *Матем. сб.* 1989. т.180 №3. с.397-423.
26. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. *Элементы теории функций и функционального анализа* М.: Наука.1976. с 337, 344, 359.
27. Леонтьев А.Ф. *Ряды экспонент.* М. Наука, 1976 с.109.
28. Beurling A., Malliavin P. On Fourier transforms of measures with compact support // *Acta Mathematica* 1962. V. 107. № 3-4 P. 291-309.
29. Никишин Е.М., Сорокин В.Н. *Рациональные аппроксимации и ортогональность.* М.: Наука. 1988.
30. Абузярова Н. Ф. О свойствах функций, обратимых по Эренпрайсу в алгебре Шварца. *Евраз. матем. ж.*, 13:1 (2022), с.9–18.
31. Джумабаев С.А., Нурахметов Д.Б. О вольтерровых трехточечных задачах для оператора Штурма-Лиувилля, связанных с симметрией потенциала. *Матем. заметки*, 2018,104, 4, 632–636 с.
32. Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. О структуре спектра краевой задачи Штурма-Лиувилля на конечном отрезке времени. *Известия АН РК. Серия физ.-мат.*, 2000, 3, 29-34 с.
33. Садовничий В.А., Кангузин Б.Е. О связи между спектром дифференциального оператора с симметричными коэффициентами и краевыми условиями // *ДАН СССР.*, 1982, 267, 2, 310–313 с.
34. Fazullin Z.Y., Kanguzhin B.E., Seitova S.A. Stable perturbations of boundary problems for differential equations. // *Bulletin of the Karaganda university. Mathematics series.* No. 4(92), 2018, pp. 38-44. (Web of Science).
35. Курош А.Г. *Курс высшей алгебры* Издательство: М.: Наука,1968.
36. Gaisin A. M., Kanguzhin B.E., Seitova A.A. Completeness of the exponential system on a segment of the real axis. *Eurasian mathematical journal*, Vol. 13, 2022 N. 2. (Scopus).
37. Ильин В.А. *Спектральная теория дифференциальных операторов.* М.: Наука, 1991, с.367.
38. Birkhoff G.D. Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations. // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1908. V.9.

39. Шкаликов А.А. О базисности собственных функций обыкновенного дифференциального оператора. // УМН, 1979. Т.34, №5, с.235-236.
40. Левин Б.Я. Распределение корней целых функций. М.: Гос. изд. тех. – теор. лит.1956, с.632.
41. Джумабаев С.А. О зависимости спектральных свойств обыкновенных дифференциальных операторов от симметрии коэффициентов. // Автореферат канд. дисс. Алматы. КазГУ, 1994, с.18.
42. Кангужин Б.Е. Некоторые вопросы теории обратных задач. // Канд. дисс. М.:МГУ, 1982, с. 101.
43. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Часть I. М.: Наука, 1976, с.320.
44. Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Кошкарбаев Н. Об асимптотике по спектральному параметру решений дифференциальных уравнений на дереве с условиями Кирхгофа в его внутренних вершинах // Математический журнал. 2017. Т. 17, № 4. с. 37-50.
45. Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Конуркулжаева М.Н. Самосопряженные сужения максимального на графе // Уфимский математический журнал. 2017. Т. 9, № 4. с. 36-44.
46. Цой С., Цхай С.М. Прикладная теория графов. Алма-Ата: Наука, 1971. 499с.
47. Афанасьева Н.А., Булот Л.П. Электротехника и электроника. Учебное пособие. СПб.: СПбГУН и П.Т. 2010. с.181.
48. Завгородний М.Г. Сопряженные и самосопряженные краевые задачи на геометрическом графе // Дифференциальные уравнения 2014. Т. 50, № 4. с. 446-456.
49. Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Приядиев В.Л. и др. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. -- М: ФИЗМАТЛИТ, 2005. с. 272.
50. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — 5-е изд. — М., 2004. — 560 с.
51. Жапсарбаева Л.К., Кангужин Б.Е., Сеитова А.А. Асимптотика собственных значений оператора двукратного дифференцирования с регулярными по Биркгофу граничными условиями на графе-звезде // Математический журнал. 2018. Т. 18, №2 (68). С.107-123.
52. Емеличев В.А. и др. Лекции по теории графов. // М.: Наука, 1990. С.382.
53. Садовничий В.А., Султанаев Я.Т., Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия для задачи Штурма-Лиувилля на геометрическом графе. // Дифференциальные уравнения. 2019. – Т.55, № 4. С. 514 – 523.
54. Ахтямов А.М. Вырожденные краевые условия для дифференциального уравнения третьего порядка. // Дифференциальные уравнения. 2018. - Т.54, №4. С. 427.
55. Дезин А.А. Спектральные характеристики общих граничных задач для оператора  $D^2$  // Мат. Заметки. 1985. Т.37. №2. С. 249-256.



56. Lang P., Locker J. Spectral theory of two-point differential operators determined by  $D^2$ . I. Spectral properties // J. of Math. Anal. and Appl. 1989. V. 141. P. 538-558.

57. Бияров Б.Н., Джумабаев С.А. Критерий вольтерровости краевых задач для уравнения Штурма-Лиувилля // Мат. заметки. 1994. Т.56. №1. С.143-146.

58. Джумабаев С.А., Кангужин Б.Е. Об одной не регулярной задаче на конечном отрезке // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. наук. 1988. №1. С. 14-18.

59. Макин А.С. Об обратной задаче для оператора Штурма-Лиувилля с вырожденными краевыми условиями // Дифференц. уравнения. 2014. Т.50. №10. С.1408-1411.

60. Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А. Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. Шымкент. Галым. 1996. 270 с.

61. Кангужин Б.Е., Сеитова А.А. О вырожденных краевых задачах Штурма-Лиувилля на геометрических графах. // Журнал «Вестник. Казахский национальный университет имени аль-Фараби». Серия математика, механика, информатика. 2020. Т. 105. №1. С. 79-86.